Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Guía 1

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Un campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si es de la forma

$$\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = f(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{1}$$

con $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1.

(a) Encuentre $\boldsymbol{\nabla} f$

(b) Calcule $\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$

(c) A partir de (a) y (b) calcule $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F}$

(d) Calcule $\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}$

(e) A partir de (a) y (d) encuentre $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$

(f) Encuentre todos los campos con simetría cilíndrica que adeás son selenoides

Solución:

En virtud de que $f = f(\rho)$, y considerando la expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas (o polares), se deduce

$$\boldsymbol{\nabla} f = f'(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{2}$$

Dado que $\hat{\boldsymbol{\rho}} = 1\hat{\boldsymbol{\rho}} + 0\hat{\boldsymbol{\phi}} + 0\hat{\mathbf{z}}$, se puede usar la expresión de la divergencia en coordenadas cilíndricas, en cuyo caso se obtiene

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\rho} = \frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

Usando la regla del producto, se sabe que $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\hat{\boldsymbol{\rho}}) = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} + f\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}$, y de allí es directo que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} = f'(\rho) + \frac{f(\rho)}{\rho}. \tag{4}$$

Usando la expresión del rotor en coordenadas cilíndricas para $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ se obtiene que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = 0. \tag{5}$$

En virtud de la regla del producto, se cumple que $\boldsymbol{\nabla} \times (f\hat{\boldsymbol{\rho}}) = \boldsymbol{\nabla} f \times \hat{\boldsymbol{\rho}} + f\boldsymbol{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}$. Considerando (a) y (d) se obtiene directamente que

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = 0. \tag{6}$$

Esto quiere decir que un campo con simetría cilíndrica es irrotacional. Un campo se dice selenoidal si su divergencia es nula. Sabiendo que $\mathbf{F}$ tiene simetría cilíndrica, y en virtud de la Ec. (4), se obtiene

$$f'(\rho) + \frac{f(\rho)}{\rho} = 0. \tag{7}$$

La Ec. (7) es una EDO de primer orden y de variables separables, se puede resolver integrando, y su solución está dada por la expresión

$$f(\rho) = \frac{C}{\rho}, \tag{8}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Por último, se puede decir que los campos con simetría cilíndrica que son selenoides tienen la forma

$$\mathbf{F} = \frac{C}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

P2. En electromagnetismo un dipolo eléctrico puntual tiene un potencial cuya expresión en coordenadas esféricas está dada por

$$V(r, \phi, \theta) = \alpha \frac{\cos(\phi)}{r^2}, \tag{10}$$

con $\alpha = 2Qd/4\pi\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Si el campo eléctrico $\mathbf{E}$ satisface la relación $\mathbf{E} = -\nabla V$, calcule el campo eléctrico generado por el dipolo puntual eléctrico.

(b) Considerando que el momento dipolar es un vector orientado en el eje z cuyo módulo satisface $\|\mathbf{p}\| = 2Qd$, demuestre que el campo eléctrico se puede escribir como

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \tag{11}$$

Solución:

Usando la expresión del gradiente en coordenadas esféricas se obtiene que el campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{E}(r, \phi, \theta) = \frac{2\alpha\cos\phi}{r^3}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\alpha\sin\phi}{r^3}\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{12}$$

Reemplazando el valor de α y factorizando pro términos comunes se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{2Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\phi\hat{\mathbf{r}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \tag{13}$$

Sabiendo que el momento dipolar $\mathbf{p}$ está orientado en el eje z, y que además su módulo es $2Qd$, se debe cumplir $\mathbf{p} = 2Qd\hat{\mathbf{z}}$. El vector unitario en el eje z se puede expresar en términos de los vectores unitarios esféricos como $\hat{\mathbf{z}} = \cos\phi\hat{\mathbf{r}} - \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Reemplazando en la Ec. (13) se deduce

$$\mathbf{E} = \frac{\|p\|}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos\phi\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}). \tag{14}$$

Por último, teniendo en cuenta que $\mathbf{p} = \|p\|\hat{\mathbf{z}}$, y dado que el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ forma un ángulo ϕ con el eje z, se cumple que $\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \cos\phi$. Considerando además que $\|r\| = r$, es directo que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \tag{15}$$

P3. La vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ es un campo vectorial muy importante en mecánica de fluidos, especialmente en el estudio de la turbulencia. El campo vorticidad está relcionado con el campo de velocidad $\mathbf{v}$ mediante la ecuación

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}. \tag{16}$$

Usando la notación tensorial y el convenio de suma de Einstein demuestre que se cumple

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}). \tag{17}$$

Solución:

En términos de la velocidad y en notación tensorial, se puede expresar la vorticidad como

$$\boldsymbol{\omega} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\hat{\mathbf{e}}_k \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \tag{18}$$

Por otra parte, se puede usar la notación tensorial para calcular

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{pqr}\omega_p v_q \hat{\mathbf{e}}_r \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_r = \varepsilon_{pqr}\omega_p v_q. \tag{19}$$

Reemplazando la Ec. (18) en la Ec. (19) con $k \longrightarrow p$ se obtiene

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_r = \varepsilon_{pqr}\varepsilon_{ijp}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)v_q. \tag{20}$$

El tensor de Levi-Civita cumple que $\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{qrp}$, y además, teniendo en cuenta la identidad $\varepsilon_{qrp}\varepsilon_{ijp} = \delta_{qi}\delta_{rj} - \delta_{qj}\delta_{ri}$. Reemplazando se deduce

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_r = (\delta_{qi}\delta_{rj} - \delta_{qj}\delta_{ri})\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)v_q. \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})_r = \left(\frac{\partial v_r}{\partial x_q}\right)v_q - \left(\frac{\partial v_q}{\partial x_r}\right)v_q. \tag{21}$$

Por último, considerando que $v_q\left(\frac{\partial v_r}{\partial x_q}\right) = (v_q\frac{\partial}{\partial x_q})v_r$, y además $v_q\left(\frac{\partial v_q}{\partial x_r}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_r}(v_q v_q)$, se obtiene el resultado pedido, es decir,

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \tfrac{1}{2}\nabla\|\mathbf{v}\|^2. \tag{22}$$