Auxiliar 2

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere el campo escalar $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión en coordenadas cartesianas es $\phi(x, y) = x^2 + y^2$. Haga un cambio de variable hacia las coordenadas polares y luego calcule $\nabla\phi$. Compare con el resultado cartesiano.

Solución:

Considerando la transformación $\rho = x^2 + y^2$, $\theta = \arctan(y/x)$, se puede expresar el campo ϕ como

$$\phi(\rho, \theta) = \rho^2. \tag{1}$$

Utilizando la expresión del gradiente en coordenadas polares, se cumple que

$$\nabla\phi(\rho, \theta) = 2\rho\hat{\rho}. \tag{2}$$

P2. Considere el campo vectorial $\mathbf{E} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya expresión en coordenadas cilíndricas está dada por

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \frac{\rho}{z}\hat{\rho} + \cos(\phi)\hat{\phi} - \frac{z^3}{h^3}\hat{\mathbf{z}}, \tag{3}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Calcule $\nabla \cdot \vec{E}$.

Solución:

Usando la expresión del operador divergencia en coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{2}{z} - \frac{\sin(\phi)}{\rho} - 3\frac{z^2}{h^3}. \tag{4}$$

P3. Un campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se dice con simetría cilíndrica si se puede llevar a la forma

$$\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = f(\rho)\hat{\rho}, \tag{5}$$

con $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Encuentre una expresión para $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

Solución:

Considerando la expresión para la divergencia en coordenadas cilíndricas, se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho}. \tag{6}$$

P4. Un potencial radial se expresa como un campo escalar $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión está dada por

$$\phi(r, \phi, \theta) = -\frac{\alpha}{\|\mathbf{r}\|}. \tag{7}$$

En el caso de la gravitación universal se cumple $\alpha = Gm_1m_2$, mientras que en electromagnetismo se tiene $\alpha = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$. Encuentre el campo vectorial de fuerzas $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathrm{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que produce el potencial escalar ϕ, el cual satisface

$$\mathbf{F}(r, \phi, \theta) = -\nabla\phi(r, \phi, \theta). \tag{8}$$

Solución:

El potencial central puede ser escrito de manera explícita como

$$\phi(r, \phi, \theta) = -\frac{\alpha}{r}. \tag{9}$$

Al calcular el campo vectorial $-\nabla\phi$ usando la expresión en coordenadas esféricas, se obtiene

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{10}$$

Considerando que $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, $\|\mathbf{r}\| = r$, la ecuación (10) se puede escribir de manera compacta y vectorial como

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \tag{11}$$