Auxiliar 2

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Considere el campo escalar $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión en coordenadas cartesianas es $\phi(x, y) = x^2 + y^2$. Haga un cambio de variable hacia las coordenadas polares y luego calcule $\nabla\phi$. Compare con el resultado cartesiano.

P2. Considere el campo vectorial $\mathbf{E} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq\longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya expresión en coordenadas cilíndricas está dada por

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \frac{\rho}{z}\hat{\rho} + \cos(\phi)\hat{\phi} - \frac{z^3}{h^3}\hat{\mathbf{z}}, \tag{1}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Calcule $\nabla \cdot \vec{E}$.

P3. Un campo vectorial $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se dice con simetría cilíndrica si se puede llevar a la forma

$$\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = f(\rho)\hat{\rho}, \tag{2}$$

con $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Encuentre una expresión para $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

P4. Un potencial radial se expresa como un campo escalar $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión está dada por

$$\phi(r, \phi, \theta) = -\frac{\alpha}{\|\mathbf{r}\|}. \tag{3}$$

En el caso de la gravitación universal se cumple $\alpha = Gm_1m_2$, mientras que en electromagnetismo se tiene $\alpha = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$. Encuentre el campo vectorial de fuerzas $\mathbf{F} :\Omega \subseteq \mathrm{R}^3\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que produce el potencial escalar ϕ, el cual satisface

$$\mathbf{F}(r, \phi, \theta) = -\nabla\phi(r, \phi, \theta). \tag{4}$$