Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 1

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Se le pide parametrizar las siguientes curvas/superficies

(a) $x^2 + y^2 = R^2$
(b) $x^2 + y^2 \leq R^2$
(c) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
(d) Una hélice de paso h, centrada en el origen, y de radio a
(e) El manto de un cono cuyo vértice está en el origen, y cuya base y altura son respectivamente r y h

Solución:

(a) $\mathbf{r}(\theta) = R(\cos\theta, \sin\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi)$
(b) $\mathbf{r}(\rho, \theta) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, con $\rho \in [0, R]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$
(c) $\mathbf{r}(\theta, \phi) = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$, con $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$
(d) $\mathbf{r}(\phi) = (a\cos\theta, a\sin\theta, \frac{\phi h}{2\pi})$, con $\phi \in [0, \infty)$
(e) $\mathbf{r}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \frac{\rho h}{r})$, con $\rho \in [0, r]$ y $\theta \in [0, 2\pi)$

P2. Se le pide calcular las curvas de nivel, el campo vectorial, y la relación entre la líneas de campo y las curvas de nivel para los siguientes potenciales:

(a) $\varphi = x^2 + y^2$ (Ejemplo de clases)
(b) $\varphi = xy$

Solución:
La vimos en clases :D

P3. Sea $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de nivel del campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Muestre que $\nabla\varphi$ es perpendicular a la curva de nivel descrita por $\mathbf{r}(t)$.

Solución:
Ser curva de nivel implica que $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\mathbf{r}(t)) = C$. Derivando dicha ecuación c/r a t se obtiene $\nabla\varphi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$. Como $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es tangencial a la curva de nivel, $\nabla\varphi$ es perpendicular a esta.

P4. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y considere la función $G(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(s) = \|\mathbf{F}(s)\|^2$. Encuentre $G'(s)$.

Solución:
$$G'(s) = 2\mathbf{F}(s) \cdot \frac{d\mathbf{F}}{ds}(s)$$

P5. La ley de Newton establece que dado un campo vectorial de fuerzas $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se cumple que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sea $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trayectoria de una partícula parametrizada en el tiempo. Considere que la energía cinética está dada por $E_c = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2$ y la energía potencial está dada por $E_p = V(\mathbf{r})$. Muestre que si $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$, entonces la energía cinética total $E = E_c + E_p$, se conserva.

Solución:

En virtud del enunciado se tiene

$$E = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + V(\mathbf{r}). \tag{1}$$

La idea central es calcular $\frac{dE}{dt}$. Usando el resultado de la pregunta 4 se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla V(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{2}$$

Considerando la hipótesis $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$, y teniendo en cuenta que $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ y $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, se cumple

$$\frac{dE}{dt} = (m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}. \tag{3}$$

En virtud de la ley de Newton (la segunda) se obtiene $\dot{E} = 0$, mostrando así lo pedido.

P6. Un potencial radial se expresa como un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión está dada por

$$\phi(x, y, z) = -\frac{\alpha}{\|\mathbf{r}\|}. \tag{4}$$

En el caso de la gravitación universal se cumple $\alpha = Gm_1m_2$, mientras que en electromagnetismo se tiene $\alpha = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$. Encuentre el campo vectorial de fuerzas $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que produce el potencial escalar ϕ, el cual satisface

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z). \tag{5}$$

Solución:

El potencial central puede ser escrito de manera explícita como

$$\phi(x, y, z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{6}$$

Al calcular el campo vectorial $-\nabla\phi$ se obtiene

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha x}{(x^2 + y^2 + x^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\alpha y}{(x^2 + y^2 + x^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{y}} - \frac{\alpha z}{(x^2 + y^2 + x^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

Considerando que $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la ecuación (7) se puede escribir de manera compacta como

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \tag{8}$$