Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 1

Profesor: Juvenal Letelier
Auxiliar: Edgardo Rosas

P1. Se le pide parametrizar las siguientes curvas/superficies

(a) $x^2 + y^2 = R^2$

(b) $x^2 + y^2 \leq R^2$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

(d) Una hélice de paso h, centrada en el origen, y de radio a

(e) El manto de un cono cuyo vértice está en el origen, y cuya base y altura son respectivamente r y h

P2. Se le pide calcular las curvas de nivel, el campo vectorial, y la relación entre la líneas de campo y las curvas de nivel para los siguientes potenciales:

(a) $\varphi = x^2 + y^2$ (Ejemplo de clases)

(b) $\varphi = xy$

P3. Sea $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de nivel del campo escalar $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Muestre que $\nabla\varphi$ es perpendicular a la curva de nivel descrita por $\mathbf{r}(t)$.

P4. Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, y considere la función $G(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(s) = \|\mathbf{F}(s)\|^2$. Encuentre $G'(s)$.

P5. La ley de Newton establece que dado un campo vectorial de fuerzas $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, se cumple que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sea $\mathbf{r}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trayectoria de una partícula parametrizada en el tiempo. Considere que la energía cinética está dada por $E_c = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2$ y la energía potencial está dada por $E_p = V(\mathbf{r})$. Muestre que si $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$, entonces la energía cinética total $E = E_c + E_p$, se conserva.

P6. Un potencial radial se expresa como un campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión está dada por

$$\phi(x, y, z) = -\frac{\alpha}{\|\mathbf{r}\|}. \tag{1}$$

En el caso de la gravitación universal se cumple $\alpha = Gm_1m_2$, mientras que en electromagnetismo se tiene $\alpha = q_1q_2/4\pi\epsilon_0$. Encuentre el campo vectorial de fuerzas $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que produce el potencial escalar ϕ, el cual satisface

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z). \tag{2}$$