

Pauta auxiliar 2.

Pregunta 1: $r(t) = (a \cos t, a \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$.

a) Conceptos claves: SUAVE, REGULAR, SIMPLE, CERRADA.

- **Suave** (suave - Luis Miguel): Decimos que una curva es suave si su parametrización $r(t)$ es C^1 .

- **Regular**: $r(t)$ suave y $\forall t \in [a, b]$ $r'(t) \neq 0$

- **Simple**: $r(t)$ es inyectiva.

- **Cerrada**: si $r(a) = r(b) \rightarrow$ El inicio es igual al final.

Veamos si es suave, basta notar que las coordenadas de $r(t)$ son funciones C^1 y como estas forman la parametrización $r(t)$, esta es suave.

¿Es cerrada? veamos en el inicio y final.

$$\begin{aligned} r(0) &= a \cos 0, a \sin 0 = a \rightarrow r(0) = r(2\pi) \rightarrow \text{CERRADA} \\ r(2\pi) &= a \cos 2\pi, a \sin 2\pi = a \end{aligned}$$

Simple debe ser inyectiva pero como es cerrada tiene 2 imágenes iguales para distintos x por lo que no es inyectiva.

Regular: es suave y debemos verificar lo segundo.

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad \|r'(t)\| \neq 0 \rightarrow \text{cubrimos todo } r'(t).$$

$$\begin{aligned} \|r'(t)\| &= \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} \\ &= \sqrt{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} \\ &= |a| > 0 \end{aligned}$$

entonces: $\|r'(t)\| > 0 \Leftrightarrow \|r'(t)\| \neq 0 \Leftrightarrow r'(t) \neq 0$
es Regular.

b) parametrización en longitud de arco.

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{dr(u)}{du} \right\| du \rightarrow \text{función de longitud de arco.}$$

$$\begin{aligned} r'(t) &= -a \sin t, a \cos t \\ \|r'(t)\| &= |a| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t |a| du \rightarrow s(t) = |a|t.$$

despejamos t :

$$t(s) = |a|/s$$

$$\Rightarrow \tau(s) = |a|/s.$$

Donde $s \in [0, L(\gamma)] = [0, s(2\pi)] = [0, 14 \cdot 2\pi]$

Pregunta 2: $\vec{g}(t) = (4 \cos t, 5 - 5 \sin t, -3 \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$

a) longitud de la curva:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\gamma'(t) = (-4 \sin t, -5 \cos t, 3 \sin t)$$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{16 \sin^2 t + 25 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{25(\sin^2 t) + 25 \cos^2 t} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 5 dt = 10\pi$$

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du \quad \text{con } s \in [0, L(\gamma)]$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t 5 du \quad \text{con } s \in [0, 10\pi] \rightarrow \text{dominio de } s$$

$$\Rightarrow s(t) = 5 \cdot t \rightarrow \sigma(s) = 4 \cos(s/5), 5 - 5 \sin(s/5), -3 \cos(s/5)$$

b) Calcular $T(s)$ y $N(s)$

Notemos que:

$$T(s) = \frac{d\sigma(s)}{ds} \quad \wedge \quad N(s) = \frac{dT(s)}{ds} / \left\| \frac{dT(s)}{ds} \right\|$$

Calculamos $\sigma'(s)$.

$$\sigma'(s) = (4 \cdot -\sin(s/5) \cdot \frac{1}{5}, -5 \cdot \cos(s/5) \cdot \frac{1}{5}, 3 \cdot \sin(s/5) \cdot \frac{1}{5})$$

$$\Rightarrow \sigma'(s) = \left(-\frac{4}{5} \sin(s/5), -\cos(s/5), \frac{3}{5} \sin(s/5) \right) = T(s)$$

Se calcula $T'(s)$:

$$T'(s) = \left(-\frac{4}{25} \cos(s/5), \frac{1}{5} \sin(s/5), \frac{3}{25} \cos(s/5) \right)$$

$$\|T'(s)\| = \sqrt{\frac{16}{625} \cos^2(s/5) + \frac{1}{25} \sin^2(s/5) + \frac{9}{625} \cos^2(s/5)}$$

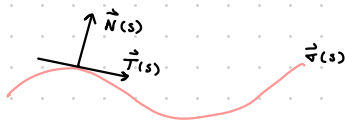
$$= \sqrt{\frac{25 \cdot 1}{625} \cos^2(s/5) + \frac{1}{25} \sin^2(s/5)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{25} [\cos^2(s/5) + \sin^2(s/5)]}$$

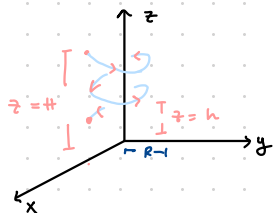
$$= 1/5$$

$$\Rightarrow N(s) = \left[\frac{-4}{25} \cos(s/5), \frac{4}{5} \sin(s/5), \frac{3}{25} \cos(s/5) \right] \cdot 5$$

$$\Rightarrow N(s) = \frac{-4}{5} \cos(s/5), \sin(s/5), \frac{3}{5} \cos(s/5)$$



Pregunta 3:



Mikasa parte de arriba del cilindro y si vemos su trayectoria en el plano $x-y$ notamos que describe un círculo de radio R

$$\therefore x, y = (R \cos t, R \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ahora fijemonos en el eje z . Notamos que al inicio, $t=0$, mikasa está a una altura h , y después de z vueltas, $t=4\pi$, ella está a una altura h .

$$\text{Entonces: } z(0) = h \quad z(4\pi) = h \Rightarrow z - z_1 = m(t - t_1)$$

$$\text{donde } m = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{h - h}{4\pi - 0}$$

$$\Rightarrow z = \frac{h - h}{4\pi} \cdot t + h.$$

Por lo que nuestra parametrización $r(t)$ queda de la siguiente forma:

$$r(t) = (R \cos t, R \sin t, \frac{(h-h)}{4\pi} \cdot t + h), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Para el largo de la cuerda:

$$r'(t) = (-R \sin t, R \cos t, \frac{h-h}{4\pi})$$

$$\begin{aligned} y \quad \|r'(t)\| &= \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + \left(\frac{h-h}{4\pi}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{R^2 \cdot 16\pi^2 + (h-h)^2} \end{aligned}$$

$$L(r) = \int_0^{4\pi} \|r'(t)\| dt = 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \sqrt{R^2 \cdot 16\pi^2 + (h-h)^2}$$

$$\Rightarrow L(r) = \sqrt{R^2 \cdot 16\pi^2 + (h-h)^2}$$

Para calcular $K(t)$ nosotros sabemos la expresión para $K(s)$, entonces:

$$K(s) = \|T'(s)\| \quad \text{sabemos que } s = s(t) = \int_0^t \|r'(u)\| du.$$

por regla de la cadena:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dT}{dt} / \frac{ds}{dt}$$

↳ TEO. FUNCIÓN INVERSA

$$y \quad \frac{ds}{dt} = s'(t) = \left(\int_0^t \|r'(u)\| du \right)' = \|r'(t)\|$$

↳ TEO. FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO.

$$\Rightarrow K(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|}$$

Calculamos $\|T'(t)\|$

$$T(t) = r'(t) / \|r'(t)\| = \left(-R \sin t, R \cos t, \frac{h-t}{4\pi} \right)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sqrt{R^2 + [h-t]^2}$$

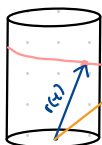
$$\Rightarrow T'(t) = \frac{(-R \cos t, -R \sin t, 0)}{\frac{1}{4\pi} \sqrt{R^2 + [h-t]^2}} = \frac{R}{\frac{1}{4\pi} \sqrt{R^2 + [h-t]^2}} \cdot (\cos t, \sin t, 0)$$

La norma de ese vector es 1!

$$\Rightarrow K(t) = \frac{R}{\frac{1}{4\pi} \sqrt{R^2 + [h-t]^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \sqrt{R^2 + [h-t]^2}}$$

$$\Rightarrow K(t) = \frac{R}{\frac{1}{16\pi^2} (R^2 + [h-t]^2)}$$

b)



Ese pedacito es tangente al cilindro y es lo que sobra de cuerda, es decir la cuerda que no está enrollada por lo que la posición de mikasa es de la siguiente forma

$$r_n(t) = \text{punto de apoyo} + \text{pedacito}$$

Sabemos que el pto de apoyo es $r(t)$, ahora veamos el pedacito:

El pedacito es tangente a la curva por lo que lo escribiremos:

$$= \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \cdot \text{lo que sobra} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \cdot (L - s(t))$$

$\hookrightarrow$ Tangente unitaria $\downarrow$ Largo cuerda $\rightarrow$ lo que está enrollado

$$L - s(t) = \int_a^b \|r'(u)\| du - \int_a^t \|r'(u)\| du = \int_t^b \|r'(u)\| du$$

$$\Rightarrow r_n(t) = r(t) + \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \cdot \int_t^{4\pi} \|r'(u)\| du$$

c) Reemplazamos:

$$r_n(t) = (R \cos t, R \sin t, \frac{h-t}{4\pi} t + t) + \frac{(-R \sin t, R \cos t, \frac{h-t}{4\pi})}{\sqrt{ctz}} \cdot \int_0^{4\pi} \sqrt{ctz} dt$$

$$\Rightarrow r_n(t) = (R \cos t, R \sin t, \frac{h-t}{4\pi} t + t) + (-R \sin t (4\pi - t), R \cos t (4\pi - t), \frac{h-t}{4\pi} (4\pi - t))$$

$$= (R t \sin t + R \cos t - 4\pi R \sin t, -R t \cos t + R \sin t + 4\pi R \cos t, h) \rightarrow z \text{ no varía}$$

$$r'_n(t) = (R \sin t + R t \cos t - R \sin t - 4\pi R \cos t, -R \cos t + R t \sin t + R \cos t - 4\pi R \sin t, 0)$$

$$= (R t \cos t - 4\pi R \cos t, R t \sin t - 4\pi R \sin t, 0)$$

$$\|r'_n(t)\| = R \sqrt{t^2 + (4\pi)^2 - 8\pi t} = R (t - 4\pi)$$

$$\Rightarrow T_n(t) = \frac{1}{t - 4\pi} (t \cos t - 4\pi \cos t, t \sin t - 4\pi \sin t, 0)$$

$$= (\cos t, \sin t, 0)$$

$$\Rightarrow T'_n(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \rightarrow \|T'_n(t)\| = 1$$

$$\Rightarrow N_H(t) = \frac{T_H^1(t)}{\|T_H^1(t)\|} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$K_H(t) = \frac{\|T_H^1(t)\|}{\|r_H^1(t)\|} = \frac{1}{R(t-4\pi)}$$

d) Tenemos $\ddot{\vec{r}} = \frac{-\alpha}{r^2} \hat{r}$, donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

encontremos r^2 :

$$r^2 = (Rt \sin t + R \cos t - 4\pi R \sin t)^2 + (-Rt \cos t + R \sin t + 4\pi R \cos t)^2 + h^2$$

$$= R^2 [t^2 + 1 + (4\pi)^2 - 8\pi t] + h^2 = R^2 [(t-4\pi)^2 + 1] + h^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_H(t) = \frac{-\alpha}{R^2 [(t-4\pi)^2] + h^2} \hat{r}$$