

MA2001-6 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Sebastián Tapia G.

Auxiliares: Luis Fuentes C., Matias B. Yañez



Auxiliar 2: Conjuntos Abiertos, Cerrados y Compactos. Sucesiones de Cauchy

P1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Muestre que A es cerrado si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\bar{x} \in A$.

obs: Una de las implicancias fue hecha en cátedra.

P2. Consideremos el espacio $\mathbb{R}^n$ junto con una sucesión numerable de abiertos $A_1, A_2, A_3, \dots \subseteq \mathbb{R}^n$

- Demuestre que $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son abiertos.
- Pruebe que $\bigcap_{i=1}^{n_0} A_i$ es un conjunto abierto.
- Pruebe que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es un conjunto abierto.
- ¿Es cierto también que la intersección numerable (infinita) de conjuntos abiertos es un conjunto abierto? Encuentre un contraejemplo que muestre que la respuesta es negativa.
- Usando las leyes de De Morgan, obtenga las propiedades para conjuntos cerrados.

P3. Encuentre en forma explícita interior, adherencia y frontera de los siguientes conjuntos; justificando brevemente sus respuestas. Indique además si alguno de ellos se trata de un conjunto abierto o cerrado.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y, x > 0\}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\} \cup \{(0, 0)\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), y > \tan(x)\}$
- $E = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$

P4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ considerando la norma euclidiana $\|\cdot\|$. Muestre que

- Si $A \subseteq B$ entonces $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.
- $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
- $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$, y la igualdad no siempre cierta.
- Si $A \subseteq B$ entonces $\text{adh}(A) \subseteq \text{adh}(B)$.
- $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$.
- $\text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$ y la igualdad no siempre cierta.
- $\text{Fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(A^c)$
- $\text{adh}(A) = A \cap \text{Fr}(A)$
- $\text{int}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{Fr}(A)$

P5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Muestre que $x \in \text{Fr}(A)$ si y sólo si para todo $r > 0$, se tiene que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$.

P6. Sean $F \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y $C, K \subseteq \mathbb{R}^n$ compactos.

- Demuestre que el conjunto $F + K$ es cerrado, donde

$$F + K = \{f + k : f \in F, k \in K\}$$

- Demuestre que el conjunto $C + K$ es compacto.

P7. Considere $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana $\|\cdot\|$, pruebe que si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto que es abierto y cerrado, entonces necesariamente $A = \mathbb{R}^n$ o $A = \emptyset$.

P8. [Propuesto] Considere el espacio vectorial de las matrices $\mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$ de tamaño $N \times N$

a) Pruebe que la función

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2 \end{aligned}$$

está bien definida, es decir, el supremo es finito.

Hint: Puede ser útil considerar que si $\|x\|_2 = 1$, entonces $|x_k| \leq 1$ para todo $k = 1, \dots, N$.

b) Pruebe que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$.

c) Muestre que para $A \in \mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$, se tiene que $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

d) Sea $A \in \mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$, demuestre que

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

existe en $\mathcal{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$.

Resumen y Cosas Útiles

- **[Unicidad del Límite]:** Sea $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión y $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Si $(x_k)_k$ converge a $\bar{x}$ e $\bar{y}$, entonces necesariamente $\bar{x} = \bar{y}$.

- **[Álgebra de Límites]:** Sean $(x_k)_k, (y_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$ dos sucesiones, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $(x_k)_k$ converge a $\bar{x}$ e $(y_k)_k$ converge a $\bar{y}$, entonces $(\alpha x_k + \beta y_k)_k$ converge a $(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y})$.

- **[Conjuntos Abiertos]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto **abierto** (o es abierto) si:

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A$$

- **[Conjuntos Cerrados]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es **conjunto cerrado** (o cerrado) si:

$$\mathbb{R}^n \setminus A = A^c \text{ es abierto}$$

- **[Caracterización de Cerrados]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Entonces

$$A \text{ es cerrado} \Leftrightarrow \forall (x_k)_k \subseteq A, x_k \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in A$$

- **[Interior]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Definimos su **interior** como:

$$Int(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A\}$$

- **[Adherencia]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Definimos su **adherencia** como:

$$Adh(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n)_n \in A, x_n \rightarrow x\}$$

- **[Frontera]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto. Definimos su **frontera** como:

$$Fr(A) = Adh(A) \setminus Int(A)$$

- **[Propiedades]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

- 1.- $Int(A) \subseteq A \subseteq Adh(A)$
- 2.- A es abierto $\Leftrightarrow A = Int(A)$
- 3.- A es cerrado $\Leftrightarrow A = Adh(A)$
- 4.- $Int(A)$ es siempre un conjunto abierto.
- 5.- $Adh(A)$ es siempre un conjunto cerrado.

- **[Punto de Acumulación]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es **punto de acumulación** de A si

$$\exists (x_k)_k \subseteq A, \forall k, x_k \neq \bar{x}, \text{ tal que } x_k \rightarrow \bar{x}$$

- **[Conjunto Acotado]:** Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe $R > 0$ tal que:

$$A \subseteq B(0, R)$$

- **[Sucesión Acotada]:** Decimos que una sucesión $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$ es **acotada** si existe $M > 0$ tal que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|x_k\| \leq M$$

- **[Subsucesión]:** Sea $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión, y $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función inyectiva y creciente. Decimos entonces que $(x_{\varphi(k)})_k$ corresponde a una **subsucesión** de $(x_k)_k$. Además toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo punto.

- **[Bolzano-Weierstrass]:** Sea $(x_k)_k$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión de $(x_k)_k$ convergente.

- **[Conjunto Compacto]:** Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto **compacto** si es cerrado y acotado.

- **[Teorema]:** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

1. A es compacto.
2. Toda sucesión $(x_k)_k \subseteq A$ posee una subsucesión $(x_{\varphi(k)})_k$ convergente a $\bar{x} \in A$.

- **[Sucesión de Cauchy]:** Una sucesión $(x_k)_k \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice **sucesión de Cauchy** si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{k} \in \mathbb{N}, \forall k, l \in \mathbb{N}, \|x_k - x_l\| < \epsilon$$

- **[Propiedad]:** Toda sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy.

- **[Teorema]:** Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ converge.