P1. Algunas cosillas de inversas y diagonales Sea D una matriz diagonal de $n \times n$ **con todos sus coeficientes distintos**, y sean $A, B, M, S \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

a) Pruebe que si MD = DM, entonces M es diagonal.

b) Sea S invertible, tal que $S^{-1}AS$ y $S^{-1}BS$ son diagonales. Pruebe que $AB = BA$. Indicación: Recuerde que el producto de matrices diagonales conmuta.

a) D diagonal con todos sus d_i distintos. Dem: $MD = DM \Rightarrow$ M es diagonal

PDQ: $\boxed{m_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j}$, $i \in [1, \dots, n]$ $j \in [1, \dots, n]$

$MD = DM$ con D diagonal. Como vimos la aux #1, (P3):

$[(dm)_{ij} = \alpha_i \cdot m_{ij}]$ $[(md)_{ij} = \alpha_j \cdot m_{ij}]$. $(\star)$

Como $MD = DM \Rightarrow (dm)_{ij} = (md)_{ij} \quad \forall i,j \in [1, \dots, n]$

$\Downarrow$

Entonces, por $(\star) \Rightarrow \alpha_i \cdot m_{ij} = \alpha_j \cdot m_{ij} \quad \forall i,j \in [1, \dots, n]$

y como además si consideramos $i \neq j$: tenemos que $[\alpha_i \neq \alpha_j]$

$\Rightarrow m_{ij} = 0$. Con lo que se demuestra lo pedido ■

b) S es invertible y $S^{-1}AS$, $S^{-1}BS$ son diagonales. Dem $AB = BA$.
Hint: producto de diagonales conmuta.

$S^{-1}AS \cdot S^{-1}BS = S^{-1}BS \cdot S^{-1}AS$

$\Rightarrow \quad S^{-1}ABS = S^{-1}BAS \quad / S \cdot$ (sólo puedo hacer esto porque S es invertible)

$\Rightarrow \quad ABS = BAS \quad / \cdot S^{-1}$ (")

$\Rightarrow \quad AB = BA$ ■

P2. Me llaman el inversionista.

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible , tal que cumple:

$$A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0$$

Muestre que $A^{-1} = -A - 3I$

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible y tal que $B^3 = 0$. Definimos, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$M(\lambda) = I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2$$

Demuestre que:

(i) $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R} : M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

(ii) $M(\beta) \cdot M(\lambda) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

(iii) $M(\lambda)$ es invertible y $M(\lambda)^{-1} = M(-\lambda)$ (Hint, analice $M(0)$)

a) $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ invertible. Tal que $A \cdot (A^2 + 3A + I) = 0 \; / A^{-1}$.

Dem: $A^{-1} = -A - 3I$.

$(A^2 + 3A + I) = 0$

$A \cdot (-A - 3I) = -A^2 - 3A \Rightarrow$

$\boxed{I = -A^2 - 3A = A(-A - 3I)}$

b) $B \in M_{nn}(\mathbb{R})$ invertible. Tq $B^3 = 0$. Definimos

$$\boxed{M(\lambda) = I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2}$$

Dem:

(i) $M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$.

$$M(\lambda+\beta) = I + (\lambda+\beta) \cdot B + \frac{(\lambda+\beta)^2}{2} \cdot B^2 = I + \lambda B + \beta B + \frac{\lambda^2}{2} B^2 + \lambda\beta B^2 + \frac{\beta^2}{2} B^2$$

$$= I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2 + \lambda\beta B^2 + \frac{\beta^2}{2} B^2 + \beta B + \frac{\lambda^2}{2} \beta B^3 + \frac{\lambda \beta^2}{2} B^3 + \frac{\lambda^2 \beta^2}{4} B^4$$

$$= \left(I + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} B^2\right)\left(I + \beta B + \frac{\beta^2}{2} B^2\right)$$ ∎

(ii) $M(\beta) \cdot M(\lambda) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

En efecto: $M(\beta) \cdot M(\lambda) = M(\beta + \lambda) = M(\lambda + \beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$ ∎

(iii) Dem $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $M(\lambda)$ es invertible y $M(\lambda)^{-1} = M(-\lambda)$.

Hint: $M(0)$

$M(0) = I + 0 \cdot B + \frac{0^2}{2} B^2 = I$

PDQ: $M(\lambda) \cdot M(-\lambda) = I$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario. En efecto:

$M(\lambda) \cdot M(-\lambda) = M(\lambda - \lambda) = M(0) = I$ ∎

P3. Invierte en Bitcoin Sea A = (a_{ij}) una matriz de permutación, es decir una matriz de $M_{nn}(\mathbb{K})$ con sólo 0's y 1's tal que tiene un y sólo un 1, por cada fila y columna. Pruebe que A es invertible y su inversa es $A^{-1} = A^t$.

A de permutación

PDQ A invertible y $A^{-1} = A^t$. En efecto:

$$(aa^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a^T_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik} \cdot a_{jk}}_{0}$$

excepto cuando ... $j = i$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} k \\ \left(\begin{array}{c} \cdots\cdots a_{ik} \cdots \\ \cdots\cdots a_{jk} \cdots \end{array} \right) \end{array}$$

$$\sum a_{ik} \cdot a_{ik} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} a_{i1} \\ \cdot \\ a_{j1} \end{array} + \begin{array}{c} a_{i2} \\ \cdot \\ a_{j2} \end{array} + \begin{array}{c} a_{i3} \\ \cdot \\ a_{j3} \end{array} \cdots \begin{array}{c} 1 \\ a_{i7} \\ \cdot \\ a_{j7} \\ 0 \end{array}$$

$$\underset{0 \cdot 0}{a_{i1} \cdot a_{i1}} + \underset{0 \cdot 0}{a_{i2} \cdot a_{i2}} \cdots + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdots$$

$$(aa^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{jk} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} := I$$

$$\underset{0}{a_{i1}^2} + \underset{0}{a_{i2}^2} + \underset{0}{a_{i3}^2} \ldots + \underset{1}{a_{i20}^2} +$$

:)

ESTO son ~~ID~~EAS SUELTAS (P3)

Ver Video PARA entender