Aux 1: Todos estaban tranquilos

Hasta que la nación de la lógica atacó.

Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Osvaldo Cartagena, Joaquín Márquez

- Una proposición lógica es un enunciado que toma un valor de verdad V o F.
- Los conectivos lógicos son operaciones entre proposiciones y permiten construir nuevas proposiciones a partir de proposiciones ya conocidas.
- Las tablas de verdad de las proposiciones básicas son:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

p	q	$p \implies q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Los conectivos $\vee$ y $\wedge$ son asociativos, conmutativos y distribuyen uno con respecto a otro.
- Otras proposiciones conocidas son:
  1. $(p \implies q) \iff (\overline{p} \vee q)$
  2. $(p \iff q) \iff [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
  3. $(p \veebar q) \iff \overline{(p \iff q)}$
- Se dirá que una proposición es una tautología si su valor de verdad es siempre V, en cambio si es siempre F diremos que es una contradicción.
- Algunas tautologías útiles son:
  1. $\overline{(p \vee q)} \iff (\overline{p} \wedge \overline{q})$
  2. $\overline{(p \wedge q)} \iff (\overline{p} \vee \overline{q})$
  3. $(p \implies q) \iff (\overline{q} \implies \overline{p})$
  4. $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$
- Una función proposicional es una expresión $p(x)$, tal que al reemplazar x en la función esta se transforma en una proposición $p(x)$.
- Un cuantificador nos proporciona información sobre los objetos a evaluar en la función proposicional. Los clásicos cuantificadores son :
  1. Cuantificador Universal ($\forall$), se lee "para todo".
  2. Cuantificador Existencial ($\exists$), se lee "existe".
  3. Cuantificador de Existencia y Unicidad ($\exists!$), se lee "existe un único".
- Las negaciones clásicas con cuantificadores son:
  1. $\overline{[\forall x, p(x)]} \iff [\exists x, \overline{p(x)}]$
  2. $\overline{[\exists x, p(x)]} \iff [\forall x, \overline{p(x)}]$
  3. $\overline{[\exists! x, p(x)]} \iff [\forall x, \overline{p(x)}] \vee [\exists x, y, p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y]$

1. Lógica Proposicional o de Orden 0

1.1. Preguntas

P1 Sea x un numero natural(0,1,...). Demuestre que:

$$x^2\text{es par} \Rightarrow x \text{ es par}$$

Hint: Usar contrareciproca

P2 En esta pregunta deberán demostrar por contradicción. Para eso deberán demostrar que el número $\sqrt{2}$ es irracional.

Indicación: Use que x es racional si y solo si x se puede escribir de forma irreductible como $x = \frac{p}{q}$, con p, q enteros coprimos.

P3

- **Matraca grado 1**
  Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones p, q, r, s, t sabiendo que:

$$[(p \iff q) \wedge \overline{(r \Rightarrow s)} \wedge \overline{t}] \Rightarrow [s \vee (q \Rightarrow s)]$$

  Es falsa.

- **Transitividad del $\iff$** Sean p, q, r proposiciones lógicas. Demuestre que la siguiente proposición es tautología:

$$[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \Rightarrow (p \iff r)$$

  Propuesto: Muestre que la conversa en general no se tiene.

P4 Sean p, q, r t s proposiciones.

1. Demuestre por método exploratorio que:
   a) $(p \implies r) \implies ((p \wedge q) \implies r)$
   b) $[(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{r} \wedge \overline{p})] \iff (p \implies q)$.
2. Demuestre por contradicción que:

$$[(p \implies q) \wedge (\overline{s} \implies \overline{r})] \implies [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$$

2. Lógica de Predicados o de Primer Orden

P1b Escriba utilizando cuantificadores las siguientes proposiciones y determine su valor de verdad.

- Para todo chilen@ existe un unico rut
- Existe un unico rut para todo chilen@

P2b Sean r y s proposiciones lógicas definidas como sigue:

$$r : \forall x \; [p(x) \implies q]$$

$$s : ((\forall x)\, p(x)) \implies q$$

1. Niegue la proposición r.
2. Niegue la proposición s.
3. Determine si $s \implies r$, $r \implies s$ o ninguna de las dos.

P3b Para P y Q predicados con un conjunto de referencia E, determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas. Cuando lo sean, dé una demostración. En caso contrario proponga predicados P y Q que muestre que no lo son:

(a) $(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$

(b) $(\exists x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x))$

(c) $(\exists x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \iff ((\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, Q(x)))$

3. Propuestos

- El fin de esta pregunta es entender (de forma simple) como es una demostración (en este caso de forma exploratoria). Para eso vamos a demostrar un resultado clásico de la geometría Euclidiana: Dados tres puntos A, B y C no colineales en el plano, demuestre que la suma de los ángulos en el triángulo ABC es de 180 grados.

  Indicación: Asuma como conocido las siguientes propiedades: "Que dada una linea recta L y un punto p fuera de L, existe una linea recta L' que pasa por p", "Todo segmento de recta se puede extender a una recta" y "Los ángulos opuestos por el vértice son iguales". Además, considere que los 180 grados son el ángulo extendido. Y la propiedad de ángulos externos internos.

- Dada la siguiente tabla de verdad, encuentre cual es la expresión de s en términos de p, q y r:

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

  Hint: Piensa en leer en voz alta cuando s es verdadera: ¿Qué obtienes? Intenta transcribirlo.

- Para ámbitos de computación y electrónica se dice que una colección de conectivos lógicos es *funcionalmente completo* si puedes expresar todas las posibles tablas de verdad con esos conectivos. Así, se dice que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ es funcionalmente completo.

  Demuestre que $p|q = \bar{p} \wedge \bar{q}$ es funcionalmente completo (es decir, puede contruir todas las tablas de verdad de p y q usando solo $|$).

  Hint: Escriba $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ con $|$ y concluya.

Autor: Jaramillo, EDO sección 2 2020