

AUX 10: CARDINALIDAD Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

P1(a)

Sea B un conjunto numerable y $\preceq$ una relación de orden total definida en B . Pruebe que dado $a \in B$, uno de los siguientes conjuntos es numerable:

- $B_1 = \{b \in B : b \preceq a\}$
- $B_2 = \{b \in B : a \preceq b\}$

B_1 es num o B_2 es num.

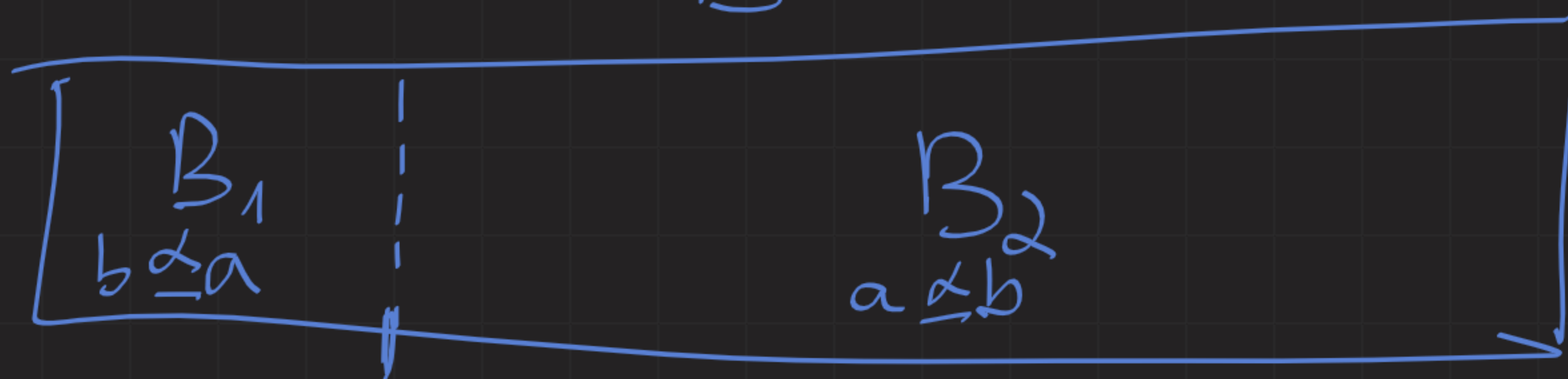
$$|B_1| = |\mathbb{N}| \quad \text{ó} \quad |B_2| = |\mathbb{N}|$$

$$B_1, B_2 \subseteq B \Rightarrow |B_1| \leq |B| = |\mathbb{N}|$$

$$|B_2| \leq |B| = |\mathbb{N}|$$

$$\left. \begin{array}{l} |B_1| \leq |\mathbb{N}|, \text{ faltaría demostrar que} \\ |B_1| \geq |\mathbb{N}| \vee |B_2| \geq |\mathbb{N}| \end{array} \right\}$$

B



$(B, \preceq)$ es orden total si:

Supongamos por contradicción que $\forall x, y \in B, x \preceq y \vee y \preceq x$

$$|B_1| < |\mathbb{N}| \wedge |B_2| < |\mathbb{N}| \quad \text{tomando } y = a \in B:$$

$$\Rightarrow B_1, B_2 \text{ son finitos} \quad \forall x \in B, x \preceq a \vee a \preceq x$$

$$\Rightarrow B_1 \cup B_2 \text{ es finito}$$

$$B_1 \cup B_2 = \left\{ \underset{\substack{b \in B: \forall y}}{b \in B : b \preceq a \vee a \preceq b} \right\} \xrightarrow{\substack{B \text{ orden total} \\ \uparrow}} B \quad \text{---X---}$$

↳ numerable!

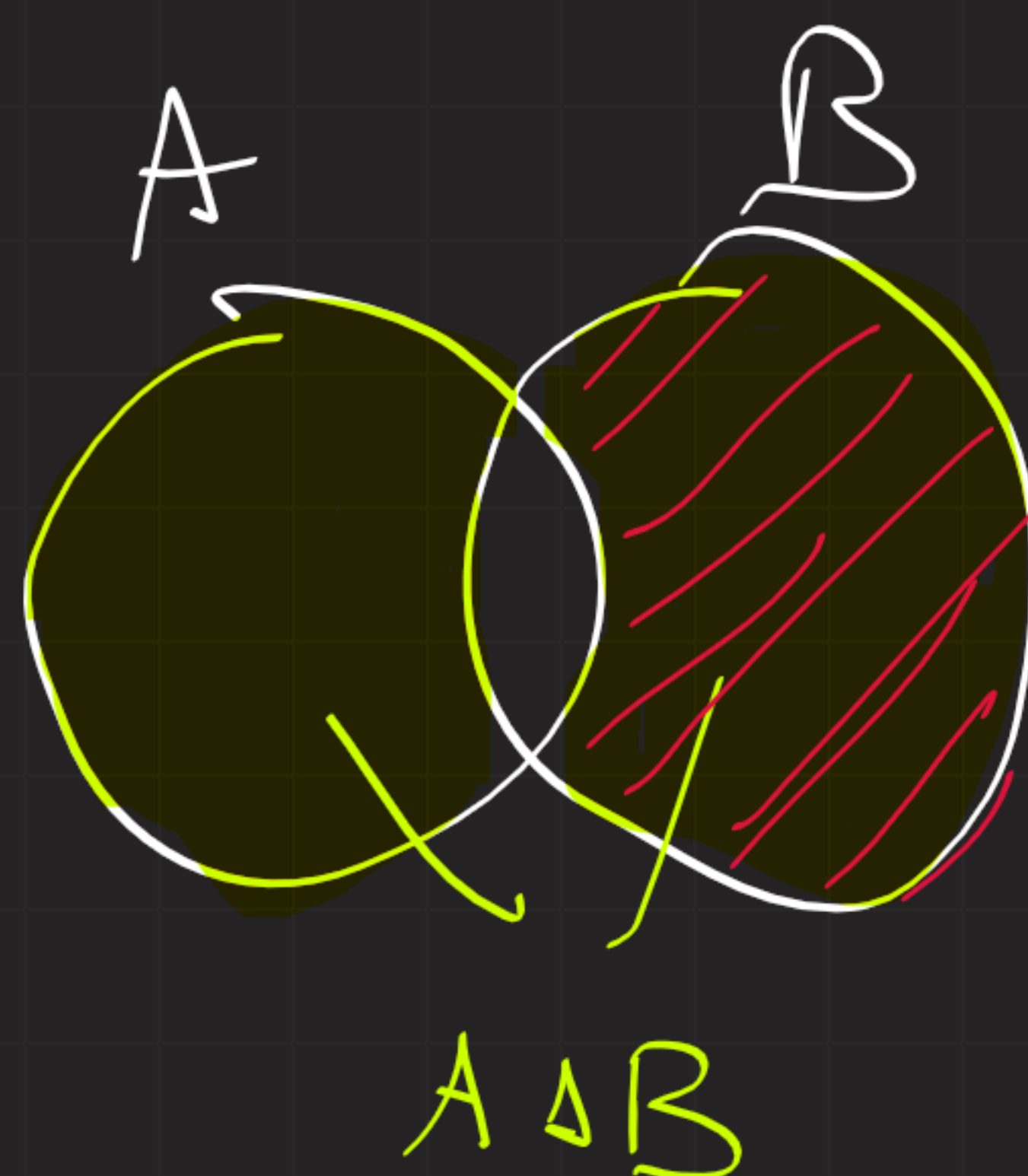
Luego $|B_1| \geq |\mathbb{N}| \vee |B_2| \geq |\mathbb{N}|$

De esto y $|B_1| \geq |\mathbb{N}| \wedge |B_2| \geq |\mathbb{N}|$

$$\Rightarrow |B_1| = |\mathbb{N}| \vee |B_2| = |\mathbb{N}| \quad \square$$

b) A, B finitos, $|A| = 13$
 $|B| = 11$
 $|A \Delta B| = 8$

Calcular $|B \setminus A|$



$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$$

$$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$$

$$\begin{aligned} B \setminus (A \cap B) &= B \cap (A \cap B)^c \\ &= B \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (B \cap A^c) \cup (B \cap B^c) \\ &= B \setminus A. \end{aligned}$$

$A \subseteq B \Rightarrow |B \setminus A| = |B| - |A|$

$$\begin{aligned} A \cap B \subseteq B &\Rightarrow |B \setminus A| = |B \setminus (A \cap B)| \\ &= |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

Mostremos que $\{A \Delta B, A \cap B\}$ es partici3n de $A \cup B$:

En efecto

• $A \Delta B \neq \emptyset$, y si $A \cap B = \emptyset$, entonces A, B disjuntos

$$\text{y } |A \Delta B| = |(A \cup B) \setminus (A \cap B)|$$

$$= |A \cup B|$$

$$= |A| + |B|$$

$$> 13 + 11 = 24 \text{ pero } |A \Delta B| = 8$$

Luego $A \cap B \neq \emptyset$.

$$\bullet (A \Delta B) \cap (A \cap B)$$

$$= ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap (A \cap B)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \cap (A \cap B)$$

$$= (A \cup B) \cap \emptyset = \emptyset. \quad \checkmark \text{ disjuntos.}$$

$$\bullet (A \Delta B) \cup (A \cap B) \text{ queremos demostrar que } = A \cup B.$$

$$= (A \cup B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

$$= ((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) \cup (A \cap B)$$

$$= ((A \cup B) \cup (A \cap B)) \cap ((A \cap B)^c \cup (A \cap B))$$

$$= (A \cup B) \cap \mathcal{U} = A \cup B \quad \square$$

Luego $\{A \Delta B, A \cap B\}$ es partici3n de $A \cup B$.

$\mathcal{C}$ es partición de D

$$|D| = \sum_{A \in \mathcal{C}} |A|$$

Luego $|A \cup B| = |A \Delta B| + |A \cap B|$

Por otro lado, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

} igualar!

Luego, igualando:

$$|A \Delta B| + |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\Rightarrow |A \cap B| = \frac{1}{2} (|A| + |B| - |A \Delta B|)$$

$$= \frac{1}{2} (13 + 11 - 8)$$

$$= \frac{1}{2} (16) = 8$$

Luego $|B \setminus A| = |B| - |B \cap A|$
 $= 11 - 8 = 3$ $\square$

P2. [Asociando ando] Consideremos $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A . Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$$

Demuestre que

- (a) $(\forall x, y \in B) x * y \in B$.
- (b) Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.
- (c) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1} , entonces $x^{-1} \in B$

$$(a) \forall x, y \in B, x * y \in B$$

Sean $x, y \in B$ arbitrarios.

$$\begin{aligned} a * x &= x * a & (1) \\ a * y &= y * a & (2) \end{aligned}$$

queremos demostrar que $\left\{ \begin{array}{l} x * y \in A \\ a * (x * y) = (x * y) * a \end{array} \right\} \Leftrightarrow x * y \in B$

$$(1) x, y \in B \Rightarrow x, y \in A \stackrel{\text{l.c.i.}}{\Rightarrow} x * y \in A.$$

$$(2) a * (x * y) \quad / * \text{ asoc.}$$

$$= (a * x) * y \quad / (1)$$

$$= (x * a) * y \quad / * \text{ asoc.}$$

$$= x * (a * y) \quad / (2)$$

$$= x * (y * a) \quad / * \text{ asoc.}$$

$$= (x * y) * a \quad \square$$

Luego $x * y \in B$.

(b) $e \in A$ neutro $\Rightarrow e \in B$.

En efecto $e \in A$ ✓

Además

$$a * e = a = e * a$$

Luego $e \in B$.

(c) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1} , entonces $x^{-1} \in B$

$$x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge a * x = x * a. \textcircled{\Delta}$$

$$\text{p.d.g.: } x^{-1} \in B \Leftrightarrow x^{-1} \in A \wedge a * x^{-1} = x^{-1} * a.$$

$$x \in A \Rightarrow x^{-1} \in A$$

demostramos $a * x^{-1} = x^{-1} * a$: En efecto

$$a * x^{-1} = e * a * x^{-1}$$

$$= (x^{-1} * x) * a * x^{-1} \text{ / no asoc}$$

$$= x^{-1} * (x * a) * x^{-1} \textcircled{\Delta}$$

$$= x^{-1} * (a * x) * x^{-1} \text{ / asoc}$$

$$= (x^{-1} * a) * (x * x^{-1})$$

$$= (x^{-1} * a) * e$$

$$= x^{-1} * a \quad \square$$

Luego $x^{-1} \in B \quad \square$

Cuando $*$ no asoc

$$(a * b) * c \neq a * (b * c)$$

Cuando sí:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

$$= a * b * e$$

x, x^{-1} inversos

e neutro.

P3] Se define en $\mathbb{R}^2$ la lei. $*$:

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$$

(a) Estudie conmutatividad y asociatividad de $*$

$$(1,1) * (0,1) = (0,1) \neq$$

$$(0,1) * (1,1) = (0,2)$$

Luego $*$ no conmuta

PERO sí asocia ✓

$$\begin{array}{l} (a,b) * ((c,d) * (e,f)) \\ = (a,b) * (ce, de+f) \\ = (ace, bce+de+f) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} ((a,b) * (c,d)) * (e,f) \\ = (ac, bc+d) * (e,f) \\ = (ace, e(bc+d)+f) \\ = (ace, bce+de+f) \end{array} \right.$$

Luego $*$ asocia

(b) Determine el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$

Sea (e_1, e_2) neutro. Luego:

$$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow (ae_1, be_1 + e_2) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae_1 = a \longrightarrow e_1 = 1 \\ be_1 + e_2 = b \end{cases}$$

$$\hookrightarrow b + e_2 = b \Rightarrow e_2 = 0$$

Neutro candidato a neutro es $(1,0)$

Verifiquemos que es neutro por la izquierda:

$$(1,0) * (a,b) = (a,b) \checkmark \checkmark$$

Luego $(1,0)$ es neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

⑤ ¿qué elementos son invertibles? Calcule sus inversos.

Buscamos $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2$ que verifiquen:

$$(a,b) * (c,d) = (1,0)$$

$$\Leftrightarrow (ac, bc+d) = (1,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac=1 \Rightarrow a, c \neq 0 \text{ y además } c = \frac{1}{a} \\ bc+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} + d = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{b}{a}$$

Luego, si $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, (a,b) es invertible por la derecha:

$$(a,b) * (c,d) = (1,0) \text{ con } (c,d) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$$

Verifiquemos que es inverso por la izquierda:

$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) * (a,b) = \left(1, \frac{1}{a} \cdot a + \left(-\frac{b}{a}\right) \cdot b\right) = (1,0) \checkmark \checkmark$$

$\therefore (a,b)$ es invertible si $a \neq 0$, con inversa $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)_{\mathbb{R}}$.

P₄] f homomorfismo de $(A, *)$ a (B, Δ) , con neutros e_A y e_B . Demuestra:

$$a) e_B \in f(A) \Rightarrow e_B = f(e_A)$$

$$e_B \in f(A) \Rightarrow \exists a \in A : f(a) = e_B$$

Sea $a \in A$ t.q. $f(a) = e_B$, entonces

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a * e_A) \quad / \text{ } f \text{ morfismo} \\ &= f(a) \Delta f(e_A) \quad / \text{ } f(a) = e_B \\ &= e_B \Delta f(e_A) \quad / \text{ } e_B \text{ neutro para } \Delta \\ &= f(e_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego } e_B &= f(a) = f(e_A) \\ &\Rightarrow e_B = f(e_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &\mapsto a^{-1} \\ f(a) &\mapsto f(a^{-1}) \end{aligned}$$

(b) $a \in A$ tiene inverso $b \in A$ para $(A, *)$ $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$
 $\Rightarrow f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ)
 e_B e_B

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } f(a) \Delta f(b) &= f(a * b) \\ &= f(e_A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e_B \\ f(b) \Delta f(a) &= f(b * a) \\ &= f(e_A) = e_B. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(a)$ invertible, con inverso $f(b)$.

(c) Supongamos que todos los elementos son invertibles.

Un homomorfismo $f: A \rightarrow B$ es inyectivo ssi $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$.

$\Leftarrow$ Sea $x, y \in A$ t.q. $f(x) = f(y) \quad (\Delta f(y)^{-1})$

$$\Leftrightarrow f(x) \Delta f(y)^{-1} = f(y) \Delta f(y)^{-1} = e_B$$

Por otro lado, por parte b:

$$f(y)^{-1} = f(y^{-1})$$

$$f: \underset{A}{X} \rightarrow \underset{B}{Y}$$

Luego $f(x) \Delta f(y^{-1}) = e_B$ (f monomorfismo)

$$\Rightarrow f(x * y^{-1}) = e_B \quad \bullet \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

$$x * y^{-1} \in f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\} \quad f^{-1}(\{e_B\}) = \{a \in X : f(a) = e_B\}$$

$$\Rightarrow x * y^{-1} = e_A$$

$$x * y^{-1} = e_A \Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow$ Propuesto, en parte.