

P₁ / a) Demuestra que si A, B finitos, entonces $|A \times B| = |B \times A|$

En elab: Supongamos que $A = \{a_i\}_{i=1}^m$
 $B = \{b_j\}_{j=1}^m$

Armones una biyección entre $A \times B$ y $B \times A$.

Sea $f: A \times B \rightarrow B \times A$

$$(a, b) \mapsto f(a, b) = (b, a).$$

o) f bien definida: pues dado $a \in A, b \in B$:

$$f(a, b) = (b, a) \text{ y efectivamente } b \in B, a \in A.$$

1) inyectiva: Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ t. q.

$$f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$$

$$\Leftrightarrow (b_1, a_1) = (b_2, a_2)$$

$$\Rightarrow b_1 = b_2 \wedge a_1 = a_2$$

$$\Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \quad \square$$

Como eran arbitrarias, $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$,

$$f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$\Leftrightarrow f$ inyectiva.

2) f sobreyectiva: Sea $(y_B, y_A) \in B \times A$. Queremos encontrar un $(x_A, x_B) \in A \times B$ t.q. $f(x_A, x_B) = (y_B, y_A)$

Tomando $x_A = y_A$, $x_B = y_B$, se tiene:

$$f(y_A, y_B) = (y_B, y_A)$$

Luego f es sobreyectiva //

Luego, f es biyectiva, y por tanto $|A \times B| = |B \times A|$ 

b) Si I es finito, pruebe que $P(I)$ es finito, y de cardinal $|P(I)| = 2^{|I|}$

Como I es finito, $I = \{x_i\}_{i=1}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

De clases sabemos que si $B^A = \{f: A \rightarrow B \mid f \text{ función}\}$ entonces $|B^A| = |B|^{|A|}$

$$\begin{aligned} \text{Vemos que } 2^{|I|} &= |\{0, 1\}|^{|I|} = |\{0, 1\}^I| \\ &= \left| \prod_{i=1}^n \{0, 1\} \right| \end{aligned}$$

Creemos una biyección entre $P(I)$ y $\{0,1\}^I$.

Vemos que $x \in \{0,1\}^I$ tiene n elementos, pues

$$\{0,1\}^I = \underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}}_{n \text{ veces}}$$

Así, por ejemplo: $x = (\underbrace{1, 0, 0, 1, 0, \dots, 1}_n)$ pertenece a $\{0,1\}^I$

Así, definimos $f: P(I) \rightarrow \{0,1\}^I$

t.q. a cada $A \subseteq I$ le asigna un $z = (z_1, \dots, z_n) \in \{0,1\}^I$ con la siguiente regla:

$$x_i \in A \Rightarrow z_i = 1$$

$$x_i \notin A \Rightarrow z_i = 0$$

Así, por ejemplo, si $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $A = \{2, 5\} \subseteq I$, entonces

$$f(A) = (0, 1, 0, 0, 1).$$

Comprobamos que es biyección:

a) f sur. Sean $A, B \in \mathcal{I}$ t.q. $f(A) = f(B)$
 probamos que $A = B$.

$$\text{Sea } f(A) = (a_1, \dots, a_n), \quad a_i \in \{0, 1\}$$

$$f(B) = (b_1, \dots, b_n), \quad b_i \in \{0, 1\}$$

Como $f(A) = f(B)$, entonces $a_i = b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Luego por cada $a_i = 1 \Rightarrow x_i \in A$

Res $a_i = b_i \Rightarrow b_i = 1 \Rightarrow x_i \in B$

y por cada $a_i = 0 \Rightarrow x_i \notin A$

Res $a_i = b_i \Rightarrow b_i = 0 \Rightarrow x_i \notin B$

Luego, tenemos $x_i \in A \Leftrightarrow x_i \in B \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Leftrightarrow A = B //$$

$$x_i \in A \Leftrightarrow a_i = 0 \Leftrightarrow b_i = 0 \Leftrightarrow x_i \in B$$

Luego f es inyectiva.

2) f epimorfismo: Sea $z = (z_1, \dots, z_n) \in \{0, 1\}^n$ que-
 remos demostrar que $\exists A \in \mathcal{I}$ t.q. $f(A) = z$. Pasa
 eso:

Si $z_i = 0$, entonces sabemos que $x_i \notin A$

$z_i = 1$, entonces sabemos que $x_i \in A$.

Así, definimos $A = \{x_i \in I : z_i = 1, i \in \{1, \dots, n\}\}$

y vemos que $f(A) = (f_1, \dots, f_n)$

donde $f_j = 0 \Leftrightarrow x_j \notin A \Leftrightarrow z_j = 0$

$f_j = 1 \quad x_j \in A \Leftrightarrow z_j = 1$

Luego $f_j = z_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow f(A) = z$. Luego f es epyectiva

Luego f BIYECTIVA, y:

$$\begin{aligned} |D(A)| &= |\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^{|I|} \\ &= 2^{|I|} \end{aligned}$$

①

PAUTA AUX #12P11

(a) Se tiene que $P \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow |P| \leq |\mathbb{N}|$ y además que los primos son infinitos $\Rightarrow |P| \geq |\mathbb{N}| \Rightarrow |P| = |\mathbb{N}|$ ■

(b) Sea $f: \mathbb{Q} \rightarrow A$
 $k \mapsto \pi^k$

Iny: Sea $k, l \in \mathbb{Q}$ tq $f(k) = f(l) \Rightarrow \pi^k = \pi^l$
 $\Rightarrow k = l$

Surv: Sea $y \in A \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Q}$ tq $y = \pi^k$, luego basta tomar $k \in \mathbb{Q}$ y se tiene $f(k) = \pi^k = y$

$\rightarrow f$ biyectiva $\Rightarrow |A| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ ■

(c) $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\sqrt[n]{q} : q \in \mathbb{Q}\}$

Notamos que es una unión numerable, y como

$\{\sqrt[n]{q} : q \in \mathbb{Q}\}$ es un conjunto donde sus elementos varían según $\mathbb{Q} \Rightarrow |\{\sqrt[n]{q} : q \in \mathbb{Q}\}| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Solo falta demostrar que $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $\{\sqrt[n]{q} : q \in \mathbb{Q}\}$ es infinito. Fijamos $n=3$ y notamos que para $q, p \in \mathbb{Q}$

tq $q \neq p \Rightarrow \sqrt[3]{q} \neq \sqrt[3]{p} \Rightarrow \{\sqrt[3]{q} : q \in \mathbb{Q}\}$ es infinito, pues se tienen elementos distintos para cada $q \in \mathbb{Q}$.

$\Rightarrow B$ es unión numerable de conjuntos que a lo más son numerables y que hay al menos 1 que es numerable

$\Rightarrow B$ es numerable.

$$(d) \quad L = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = k\}$$

Notamos que es una unión numerable. Ahora hay que demostrar que $Y_k := \{X \subseteq \mathbb{N} : |X| = k\}$ es a lo más numerable:

Sea $k \in \mathbb{N}$. Definimos $f: Y_k \rightarrow \mathbb{N}^k$

tg $f(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ donde

$\{a_1, \dots, a_k\} = \{b_1, \dots, b_k\}$ y $b_1 < b_2 < \dots < b_k$, es decir,

la función entrega el conjunto $\{a_1, \dots, a_k\}$ como k -tupla ordenada de menor a mayor.

Inv: Sea $A, B \in Y_k$ tg $f(A) = f(B)$

$$\Rightarrow (b_1^A, \dots, b_k^A) = (b_1^B, \dots, b_k^B) \Rightarrow b_i^A = b_i^B \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\{b_1^A, \dots, b_k^A\}}_A = \underbrace{\{b_1^B, \dots, b_k^B\}}_B$$

$\Rightarrow f$ es inyectiva $\Rightarrow |Y_k| \leq |\mathbb{N}^k| = |\mathbb{N}|$ por ser producto finito de numerables.

(2)

$$\Rightarrow |Y_k| \leq |\mathbb{N}| \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Ahora solo falta ver que $\exists k \in \mathbb{N}$ tq Y_k es infinito:

$$\text{Con } k=1: Y_1 = \{X \subseteq \mathbb{N} : |X|=1\}$$

$$= \{ \{n\} : n \in \mathbb{N} \} \text{ que claramente es infinito.}$$

(se puede hacer una biyección con $\mathbb{N}$ para asegurarse)

$\Rightarrow L$ es unión numerable de conjuntos, a lo más, numerables.

con al menos 1 de ellos infinito $\Rightarrow L$ es numerable

(c) Definimos $f: L \rightarrow O$
 $X \mapsto X^c$

Notamos que está bien definida pues si $X \in L \Rightarrow X$ es finito

luego, $f(X) = X^c$ y $X^c \in O$ pues $(X^c)^c = X$ es finito.

Inv: Sea $X, Y \in L$ tq $f(X) = f(Y) \Rightarrow X^c = Y^c \Rightarrow X = Y$

Epi: Sea $X \in O$, basta tomar X^c (que $\in L$ pues $X \in O$

$\Rightarrow X^c$ es finito) y se tiene $f(X^c) = (X^c)^c = X$

$\Rightarrow f$ biyectiva $\Rightarrow |O| = |L| = |\mathbb{N}|$

$\Rightarrow P, A, B, L, O$ son numerables $\blacksquare$

P3 (a) Determine cardinal de

$$A = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = m \}$$

Mostremos $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq P$:

$$\text{Sea } (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (n_1, n_2, n_3) \in P$$

Luego $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq P \Rightarrow P$ es infinito ($|P| \geq |\mathbb{N}|$)

Falta demostrar que $|P| \leq |\mathbb{N}|$

Mostremos que $P \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Sea $(x_1, x_2, x_3) \in P$

$$\text{Luego } x_1 + x_2 + x_3 = m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Vemos que } x_1 = m - x_2 - x_3$$

• suma y resta de enteros es entera.

$$\text{Luego } x_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow P \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |P| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

Luego $|P| = |\mathbb{N}|$: P es numerable

(b) Muestra que: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{N}\}$ es no numerable.

Basta mostrar $|B| \geq |\mathbb{R}|$ (o $|B| > |\mathbb{N}|$)

Veremos que $A = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq B$, pues

$$(x, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \wedge \quad x - x = 0 \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$\text{Luego } |A| \leq |B|$$

Además, $|A| = |\mathbb{R}|$: Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow A$

$$x \longmapsto f(x) = (x, x)$$

iny | Sean $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow (x, x) = (y, y) \Rightarrow x = y.$$

epi | Sea $y \in A \Rightarrow \exists \tilde{r} \in \mathbb{R} : y = (\tilde{r}, \tilde{r})$. Luego

basta tomar $x = \tilde{r}$ para que:

$$f(x) = (x, x) = (\tilde{r}, \tilde{r}) = y.$$

$\therefore f$ biyectiva

$$\Rightarrow |A| = |\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

y como $|B| \geq |A| > |\mathbb{N}|$, se tiene que B es no numerable $\square$

$$\underline{P_4} \mid B = \{f_n(a) \mid n \in \mathbb{N}, a \in A\}$$

$$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{f_n(a)\}$$

si A es numerable, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\bigcup_{a \in A} \{f_n(a)\}$ es unión numerable de conjuntos finitos

$\Rightarrow \bigcup_{a \in A} \{f_n(a)\}$ es, a lo más, numerable.

$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{f_n(a)\}$ es unión numerable de conjuntos,

a lo más, numerables

$$\Rightarrow |B| \leq |\mathbb{N}|$$

Ahora: $\{f_0(a) \mid a \in A\} \in B$. Como $f_0 = id_A$:

$$\{f_0(a) \mid a \in A\} = \{a \mid a \in A\} = A.$$

$$\Rightarrow A \subseteq B$$

$$\Rightarrow |A| \leq |B|$$

$$\Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |B| \quad \wedge \quad |B| \leq |\mathbb{N}|$$

$$\Rightarrow |B| = |\mathbb{N}| \Rightarrow B \text{ numerable.}$$

