MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar Extra - Control Recuperativo

18 de mayo de 2021

P1. (a) Sea $a \in \mathbb{N}$ y ℓ_n definida por la recurrencia $\ell_0 = 2$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_{n+1} = a\ell_n + (1-a)$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \ell_n = a^n + 1$.

(b) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2$, $f_1 = 2a$ y $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq a^n + b^n$

(c) Sea s_n definida por la recurrencia $s_0 = 0$ y $s_{n+1} = s_n + \ell_n$, para $n \geq 0$. Demostrar que si $a \neq 1$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = (a^n - 1)/(a-1) + n$. ¿Cuánto vale s_n cuando $a = 1$?.

P2. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que $E \in \mathcal{F}$. Demuestre que:

$$(\forall A, B \in \mathcal{F}, A \setminus B \in \mathcal{F}) \iff (\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \in \mathcal{F} \wedge B^c \in \mathcal{F}).$$

P3. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\psi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in \mathcal{F}$ le asocia $\psi(f) = f(0)$. Demuestre que ψ es una función epiyectiva y justifique por qué ψ no es inyectiva

P4. Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \longrightarrow F$ una función epiyectiva.

(a) Demuestre que si $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ es una partición de F, entonces $\mathcal{E} = \{f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2), \ldots, f^{-1}(F_n)\}$ es una partición de E.

(b) Demuestre que si f es además inyectiva y $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ es una partición de E, entonces $\mathcal{F} = \{f(E_1), f(E_2), \ldots, f(E_n)\}$ es una partición de F.