

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo R. Dartnell R.

Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras



Auxiliar 3 - Conjuntos

21 de Abril de 2021

Resumen

■ [Nociones básicas]:

- **Conjunto Referencia:** Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Si denotamos E al conjunto de referencia, tenemos que $x \in E$ es siempre verdad.
- **Conjunto vacío:** Se define el conjunto $\emptyset$ como el conjunto que no posee elementos, es decir $x \in \emptyset$ es siempre falso.

■ [Definiciones Básicas]: Sean A y B conjuntos, se define:

- **Igualdad:**
 $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- **Inclusión:**
 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- **Unión:**
 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- **Intersección:**
 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
- **Complemento:**
 $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- **Diferencia:**
 $A \setminus B := A \cap B^c$
- **Diferencia simétrica:**
 $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

■ [Propiedades de inclusión]: Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos:

a) $\emptyset \subseteq A \subseteq E$

b) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$

■ [Propiedades de igualdad]: Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos:

a) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

b) $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$

c) $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$

d) *Ley de De Morgan*

• $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

• $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

■ [Equivalencias útiles]: Son equivalentes:

I) $A \subseteq B$

II) $B^c \subseteq A^c$

III) $A \cap B^c = \emptyset$

IV) $B \cup A^c = E$

■ [Conjunto potencia]: Se define el conjunto potencia (o también llamado conjunto de las partes) $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A :

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

Obs. : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ siempre.

■ [Unión e intersección de Conjuntos potencia]:

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

2. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

P1. Sean A, B, C conjuntos, demuestre que:

(a) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$

(b) $[(A \cap B) \subseteq C] \Rightarrow [(A \cap C^c) \subseteq B^c]$.

(c) $A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$

P2. Sea $A \subseteq \mathcal{U}$ fijo, demuestre que $\forall X, Y \subseteq \mathcal{U}$ se tiene:

$$(X \cup A) = (Y \cup A) \wedge (X \cap A) = (Y \cap A) \Rightarrow X = Y$$

P3. Sea $\mathcal{U}$ conjunto universo. Sean A, B conjuntos fijos con $A \neq \emptyset$. Para cualquier conjunto $X \subseteq \mathcal{U}$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente forma:

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & \text{si } A \cap X \neq \emptyset \\ X \cup B & \text{si } A \cap X = \emptyset \end{cases}$$

Pruebe que:

- (a) $C(B) \in \{\emptyset, B\}$
- (b) $C(A) = A \setminus B \wedge C(A^c) = (C(A))^c$
- (c) $(X \cap Y) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow C(X \cap Y) = C(X) \cap C(Y)$.

P4. Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que:

- (a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
- (b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- (c) Si $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$, entonces $A \subseteq B \vee B \subseteq A$

