Introducción al Álgebra MA1101

Guía 6: Funciones y Relaciones

Definiciones básicas:

- Para $f : E \to F$ función, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$,
  - $f(A) = \{f(x) \in F | x \in A\}$.
  - $f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$
- Para $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, $\mathcal{R}$ es
  - Refleja: si $\forall a \in A$, $a\mathcal{R}a$.
  - Simétrica: si $\forall a, a' \in A$, $a\mathcal{R}a' \Leftrightarrow a'\mathcal{R}a$.
  - Antisimétrica: si $\forall a, a' \in A$, $a\mathcal{R}a' \wedge a'\mathcal{R}a \Rightarrow a = a'$.
  - Transitiva: si $\forall a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

P1. Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ función. Demuestre las siguientes propiedades,

a) $\forall B \subseteq F$, $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.
b) $\forall B \subseteq F, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
c) $(\forall A \subseteq E,\ f(A^c) \subseteq (f(A))^c) \Leftrightarrow f$ inyectiva.

P2. Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \to F$ función.

a) Sean $A, B \subseteq E$. Demuestre que $f(B) \setminus f(A) = \emptyset \Rightarrow f(A \cup B) = f(A)$.
b) Demuestre que si f satisface la siguiente propiedad,

$$\forall A, B \subseteq E, (A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B)),$$

entonces f es inyectiva.
Indicación: Recuerde que para demostrar que f es inyectiva debe probar que $\forall x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Puede ser útil construir los conjuntos A y B adecuadamente usando los elementos x e y y luego usar la propiedad de f.

P3. Sea E un conjunto no vacío. Sea $f : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ definida por $f(X, Y) = X \setminus Y$.

a) Sea $A \subseteq E$. Determine $f(\{(E, \emptyset), (\emptyset, A), (A, \emptyset)\})$.
b) Determine $f(D)$ donde $D = \{(X, X) | X \in \mathcal{P}(E)\}$.
c) Demuestre que $f^{-1}(\{E, \emptyset\}) = \{(E, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq Y\}$.

P4. Sea E un conjunto no vacío, y sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ una partición de E. Se define en E la relación $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ de la siguiente forma: para $a, b \in E$,

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{C}, \quad a \in C \wedge b \in C.$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia (es decir, refleja, simétrica y transitiva).
Indicación: Recuerde que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es una partición de E si las siguientes condiciones se cumplen:

- $\forall C \in \mathcal{C}$, $C \neq \emptyset$.
- $\forall C, C' \in \mathcal{C}$, si $C \neq C'$, entonces $C \cap C' = \emptyset$.
- $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = E$.

P5. Se define en $\mathbb{N}$ la relación $\mathcal{T}$ de la siguiente forma: para $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m\mathcal{T}n \Leftrightarrow (m = n) \vee (2|n \wedge 2|m).$$

Estudie la reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad de $\mathcal{T}$.