Introducción al Álgebra MA1101

Guía 9: Coeficientes Binomiales, Conjuntos Finitos y Infinitos

P1. Sean $\ell, k, n \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq \ell < k \leq n$.

(a) Pruebe que $\binom{n}{k} = \binom{n}{\ell} \;\Leftrightarrow\; k + \ell = n$.
(b) Pruebe que $\binom{n}{n-\ell} + \binom{n}{\ell+1} = \binom{n+1}{n-\ell}$.
(c) Pruebe que $\binom{n+1}{n-1} + 1 = \binom{n-1}{2} + 2n$.
(d) Pruebe la igualdad $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ y úsela para probar que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ para $p \in \mathbb{R}$.

P2. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y sean A, B conjuntos tales que $|A| = n$, $|B| = m$ y $A \cap B = \emptyset$.

(a) Pruebe que $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j} = \sum_{i=0}^{n+m}\binom{m+n}{i}$.
(b) Pruebe que $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A \cup B)|$.
(c) Encuentre una función biyectiva de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$.
(d) Si se elimina la condición $A \cap B = \emptyset$, ¿sigue siendo cierto (b)? ¿la función de (c) sigue siendo biyectiva?

P3. Sea F el conjunto de todas las funciones $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Determine $|F|$.
(b) Determine la cardinalidad del conjunto I de todas las funciones inyectivas en F.
(c) Determine la cardinalidad del conjunto B de todas las funciones biyectivas en F si $k = n$.
(d) Determine la cardinalidad del conjunto B de todas las funciones biyectivas en F si $k \neq n$.

P4. Para $i \in \mathbb{N}^*$, se definen $A_i = \{i\}$ y $B_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$. Recuerde que para conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ definimos $\times_{i=1}^{n} C_i = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$.

(a) Determine $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$ y $|\bigcup_{i=1}^{n} B_i|$.
(b) Determine $|\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_n)|$.
(c) Determine $|\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)|$.
(d) Determine $|(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \times (\times_{i=1}^{n} B_i)|$.
(e) Determine $|(\times_{i=1}^{n} A_i) \times (\times_{i=1}^{n} B_i)|$.
(f) Encuentre una función biyectiva entre $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_n)$ y B_{n^2} o muestre que no existe tal función.
(g) Encuentre una función biyectiva entre $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)$ y $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ o muestre que no existe tal función.

P5. Sean A_i, B_i como en la **P4**. Encuentre funciones biyectivas entre los siguientes conjuntos, así mostrando que tienen la misma cardinalidad.

(a) entre $\mathbb{N} \setminus A_1$ y $\mathbb{N} \setminus A_2$,
(b) entre $\mathbb{N} \setminus B_{10}$ y $\mathbb{N}$,
(c) entre $B_2 \times \mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$,
(d) entre $[0]_{\equiv_3}$ y $\mathbb{Z}$.