Pauta Examen

MA1101 - Introducción al Álgebra - Semestre Otoño 2019
04 de Julio de 2019

P1. *a*) Sea Ω la relación en $\mathbb{C}[x]$ definida por:

$$P\ \Omega\ T \iff \exists Q \in \mathbb{C}[x], P(x) - T(x) = (x^3+1)\cdot Q(x)$$

I) Demuestre que Ω es una relación de equivalencia.
Solución:

Para que Ω sea una relación de equivalencia, esta tiene que ser refleja, simétrica y transitiva. Veamos cada una por separado:

- Ω refleja: Sea $P \in \mathbb{C}[x]$ arbitrario.

$$P\ \Omega\ P \iff \exists Q \in \mathbb{C}[x], P(x) - P(x) = (x^3+1)\cdot Q(x)$$

Vemos que $P(x) - P(x) = 0$. Así,

$$0 = (x^3+1)Q(x) \Longrightarrow Q(x) = 0$$

Entonces, tomando $Q(x) = 0 \in \mathbb{C}[x]$, se cumple $P\ \Omega\ P$

- Ω simétrica: Sean $P, T \in \mathbb{C}[x]$ arbitrarios. Queremos demostrar que $\forall P, T \in \mathbb{C}[x]$, $P\ \Omega\ T \implies T\ \Omega\ P$. Entonces, como hipótesis tendremos que

$$\begin{aligned} \exists S \in \mathbb{C}[x],\ P(x) - T(x) &= (x^3+1)\cdot S(x) && \text{/Multiplicando por } -1 \\ T(x) - P(x) &= (x^3+1)\cdot(-S(x)) \end{aligned}$$

Así, para que $P\ \Omega\ T \implies T\ \Omega\ P$, basta tomar $Q = -S \in \mathbb{C}[x]$, donde S es tal que se cumple la relación de la hipótesis. Como $P, T \in \mathbb{C}[x]$ son arbitrarios, sigue que se cumple $\forall P, T \in \mathbb{C}[x]$.

- Ω transitiva: Sean $P, R, S \in \mathbb{C}[x]$ arbitrarios. Queremos demostrar que:

$$\forall P, R, S \in \mathbb{C}[x], P\ \Omega\ R \wedge R\ \Omega\ S \implies P\ \Omega\ S$$

Así, como hipótesis tendremos:

$$P\ \Omega\ R \iff \exists Q^* \in \mathbb{C}[x], P(x) - R(x) = (x^3+1)\cdot Q^*(x) \tag{1}$$
$$R\ \Omega\ S \iff \exists \bar{Q} \in \mathbb{C}[x], R(x) - S(x) = (x^3+1)\cdot \bar{Q}(x) \tag{2}$$

Sumando (1) y (2), tendremos:

$$P(x) - R(x) + R(x) - S(x) = (x^3+1)\cdot Q^*(x) + (x^3+1)\cdot \bar{Q}(x)$$

Cancelando términos semejantes y factorizando por (x^3+1), tendremos que:

$$P(x) - S(x) = (x^3+1)(Q^*(x) + \bar{Q}(x))$$

Así, tomando $Q = Q^x + \bar{Q} \in \mathbb{C}[x]$, se cumple $P\ \Omega\ S$. Como P, R, S son arbitrarios, sigue que Ω es transitiva.

Como Ω es refleja, simétrica y transitiva, sigue que Ω es una relación de equivalencia.

II) Encuentre $R \in [x^5 + x]_\Omega$ tal que $gr(R) < gr(x^3 + 1)$.
Solución:

Por definición de la clase de equivalencia, tenemos que $x \in [a]_{\mathcal{R}} \iff x\mathcal{R}a$. Así,

$$R \in [x^5 + x]_\Omega \iff R\ \Omega\ (x^5 + x)$$

y por definición de Ω,

$$\begin{aligned} R\ \Omega\ (x^5 + x) &\iff \exists Q \in \mathbb{C}[x], R(x) - (x^5 + x) = (x^3 + 1) \cdot Q(x) \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{C}[x], R(x) = (x^3 + 1) \cdot Q(x) + x^5 + x \end{aligned}$$

Ordenando términos para reconocer el polinomio:

$$R(x) = x^5 + x^3 \cdot Q(x) + x + Q(x)$$

Para que $gr(R) < 3$, los términos x^5 y x^3 se tienen que ir. Además, $gr(Q) < gr(x^3 + 1) = 3$ por el término $Q(x)$ que quedó. Así, probando con $Q(x) = -x^2$ (conveniente para eliminar el término x^5 usando el término x^3 y además cumple que $gr(Q) < 3$, se tiene que:

$$\begin{aligned} & R(x) = x^5 + x^3 \cdot (-x^2) + x + (-x^2) \\ \iff & R(x) = x^5 - x^5 + x - x^2 \\ \iff & R(x) = x - x^2 \end{aligned}$$

Notamos que $gr(R) = 2 < 3$, lo cual cumple la condición pedida. Así, con $R = x - x^2$, se tiene que $R \in [x^5 + x]_\Omega$ (con $Q \in \mathbb{C}[x], Q(x) = -x^2$) y $gr(R) < gr(x^3 + 1)$, que es lo pedido.

---

b) Calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{\substack{j \in [0..,2n] \\ j \text{ es par}}} 2^{-j+i}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{\substack{j \in [0..,2n] \\ j \text{ es par}}} 2^{-j+i} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{\substack{j \in [0..,2n] \\ j \text{ es par}}} 2^{-j} \cdot 2^i & /2^i \text{ constante en suma con índices } j \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^i \sum_{\substack{j \in [0..,2n] \\ j \text{ es par}}} 2^{-j} \end{aligned}$$

Para poder resolver la suma interior, debemos entender qué estamos sumando. Extendiendo la suma, vemos que:

$$\sum_{\substack{j \in [0..,2n] \\ j \text{ es par}}} 2^{-j} = 2^{-0} + 2^{-2} + 2^{-4} + \cdots + 2^{-(2n-2)} + 2^{-2n}$$

Como todos los exponentes son múltiplos de -2, podemos usar la propiedad de los exponentes de $a^{bc} = (a^b)^c$ y expresar la suma como

$$(2^{-2})^0 + (2^{-2})^1 + (2^{-2})^2 + \cdots + (2^{-2})^{n-1} + (2^{-2})^n$$

La cual es, evidentemente, una suma geométrica que varía entre 0 y n. Así:

$$\sum_{\substack{j \in [0..,2n] \\ j \text{ es par}}} 2^{-j} = \sum_{k=0}^{n} (2^{-2})^k = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{4})^k = \frac{1 - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

Multiplicando el numerador y denominador por 4, se simplifica un poco:

$$\frac{1-\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4-(\frac{1}{4})^n}{3}$$

y así, la suma original queda:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^i \sum_{\substack{j\in[0..,2n]\\ j \text{ es par}}} 2^{-j} &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^i\cdot\frac{4-(\frac{1}{4})^n}{3} && /\frac{4-(\frac{1}{4})^n}{3} \text{ constante en suma con índices } i\\
&= \frac{4-(\frac{1}{4})^n}{3}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^i && /\text{Multiplicando por } 1 = 1^{n-i} \text{ conveniente}\\
&= \frac{4-(\frac{1}{4})^n}{3}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^i\cdot 1^{n-i} && /\text{Binomio de Newton}\\
&= \frac{4-(\frac{1}{4})^n}{3}\cdot(2+1)^n = \frac{4-(\frac{1}{4})^n}{3}\cdot 3^n
\end{aligned}$$

P2. *a)* Se sabe que $\mathbb{R}^2$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas por:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \qquad \forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd,ad+bc) \qquad \forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$$

es un anillo conmutativo.
Encuentre el neutro para $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ y demuestre que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus 0, (x,-x)$ es divisor de cero.
Solución:

Buscamos el par ordenado (e_1,e_2) tal que:

$$(a,b)\cdot(e_1,e_2)=(a,b) \qquad \forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

No hay que revisar por ambos lados, pues $\cdot$ conmuta. Por definición de la l.c.i $\cdot$ tenemos que:

$$(ae_1+be_2,ae_2+be_1)=(a,b)$$

Lo cual forma el sistema de ecuaciones:

$$ae_1+be_2=a \tag{1}$$
$$ae_2+be_1=b \tag{2}$$

Multiplicando (1) por a y (2) por b:

$$a^2e_1+abe_2=a^2 \tag{3}$$
$$abe_2+b^2e_1=b^2 \tag{4}$$

Luego, restando (3)$-$(4), se cancelan los términos abe_2, y se llega a que

$$a^2e_1-b^2e_1=a^2-b^2$$
$$\iff (a^2-b^2)(e_1)=a^2-b^2$$

Como los elementos en $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ son cancelables, se tiene lo siguiente (si $a^2-b^2=0$, la ecuación se vuelve $0=0 \iff V$)

$$(a^2-b^2)(e_1)=a^2-b^2 \implies e_1=1$$

Luego, reemplazando $e_1=1$ en (1):

$$a+be_2=a \qquad /+(-a)$$
$$\iff be_2=0 \qquad /:b\neq 0.\ \text{Si } b=0, \text{ ecuación trivial.}$$
$$\iff e_2=0$$

Por lo tanto, el neutro para $(\mathbb{R}^2,\cdot)$ es el par $(1,0)$.

Sea $x\in\mathbb{R}$ arbitrario. En efecto, basta tomar el par $(a,a)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, para que:

$$(x,-x)\cdot(a,a)=(xa+(-x)a,(-x)a+xa)=(0,0)$$

Como x,a arbitrarios, se cumple que $\forall x,a\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\},(x,-x)$ es divisor de cero.

I) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función definida por $f(x) = \overline{z}i, \forall z \in \mathbb{C}$. Demuestre que f es biyectiva.
Solución:

Primera forma: Teorema de la inversa. Buscando la inversa de la función, se ve que:

$$\begin{aligned} w &= \overline{z}i && /\text{Multiplicando por } -i \\ -wi &= \overline{z} && /\text{Conjugando a ambos lados} \\ \overline{-wi} &= z && /\text{Por propiedad } \heartsuit\text{: } \overline{zw} = \overline{z}\cdot\overline{w} \\ \overline{w}\cdot\overline{-i} &= z && /\overline{-i} = i \\ \overline{w}i &= z \end{aligned}$$

Así, si f es biyectiva, f es su propia inversa. Así, verifiquemos que $f \circ f = id_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} f \circ f = f(\overline{z}i) &= (\overline{\overline{z}i})i \\ &= (z\overline{i})i \\ &= z\cdot(-i)\cdot i \\ &= z \cdot 1 = z = id_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Por caracterización de la función inversa (Teorema de la inversa), sigue que f es biyectiva con inversa f.
Segunda forma: Epiyección e Inyección. f es epiyectiva si y sólo si:

$$\forall w \in \mathbb{C}, \exists z \in \mathbb{C}, w = f(z) = \overline{z}i$$

Basta tomar $z = \overline{w}i$. Así,

$$\begin{aligned} f(\overline{w}i) &= (\overline{\overline{w}i})i \\ &= (w\overline{i})i \\ &= w\cdot(-i)\cdot i \\ &= w\cdot 1 = w \end{aligned}$$

Luego, como w es arbitrario, se cumple $\forall w \in \mathbb{C}$. Así, f es epiyectiva.
f inyectiva si y solo si:

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, f(z) = f(w) \implies z = w$$

En efecto,

$$\begin{aligned} f(z) = f(w) &\implies \overline{z}i = \overline{w}i \\ &\iff \overline{z} = \overline{w} \\ &\iff z = w \end{aligned}$$

Luego, como $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrarios, se tiene que f es inyectiva.
Finalmente, como f es epiyectiva e inyectiva, se concluye que f es biyectiva.

II) Para $m \in \mathbb{N} \setminus 0$, denotemos $f^m = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (m veces).
Demuestre usando inducción que $\forall n \geq 1, f^{2n} = id_{\mathbb{C}}$.
Solución:

Caso base: $n = 1$:

$$\begin{aligned} f^{2\cdot 1}(z) = f \circ f(z) = f(\overline{z}i) &= (\overline{\overline{z}i})i \\ &= (z\overline{i})i \\ &= z \cdot (-i) \cdot i \\ &= z \cdot 1 = z = id_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Hipótesis inductiva: para algún $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $f^{2n} = id_{\mathbb{C}}$. Para $n+1$, tendremos que:

$$\begin{aligned} f^{2(n+1)} &= f^{2n+2} && \text{/Por definición de } f^n \\ &= f^{2n} \circ f \circ \ f && \text{/Hipótesis inductiva} \\ &= id_{\mathbb{C}} \circ f \circ f && /id_{\mathbb{C}} \circ g = g \\ &= f \circ f && \text{/Caso base} \\ &= id_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Luego, por inducción, sigue que $\forall n \geq 1, f^{2n} = id_{\mathbb{C}}$.

P3. *a)* Factorice el polinomio $x^3 + 1$ en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.
Solución:

Sabemos que la suma de cubos nos permite hacer la siguiente factorización:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

De donde extraemos una raíz: $x = -1$, mientras que las otras dos se extraen de la resolución de la cuadrática $x^2 - x + 1 = 0$, la cual tiene como solución:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Así tenemos las otras dos raíces: $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Luego, la factorización real estará dada por

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Mientras que la factorización compleja estará dada por

$$x^3 + 1 = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

---

b) Sea $P \in \mathbb{C}[x]$. Se sabe que el resto de dividir $P(x)$ por $(x - 2)$ es igual 1 y el resto de dividir $P(x)$ por $(x - 3)$ es igual a -1. Encuentre el resto de dividir $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)$.
Solución:

Por el teorema del resto, se sabe que el resto de dividir un polinomio por $x - c$ es igual a $p(c)$. De lo anterior concluimos que $p(2) = 1$ y $p(3) = -1$. Por el teorema de la división, sabemos que existe un polinomio $q(x)$ y un resto $r(x)$ tales que:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - 2)(x - 3) + r(x)$$

Y según el mismo teorema se cumple que $gr(d) > gr(r)$. Es decir, si el divisor es un polinomio de grado 2, el resto es, a lo más, una recta (un polinomio de grado 1) de la forma $ax + b$. Por lo tanto, se cumple que:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - 2)(x - 3) + ax + b$$

Reemplazando:

$$p(2) = 2a + b = 1 \qquad p(3) = 3a + b = -1$$

Se resuelve así el sistema:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 1 \\ 3a + b &= -1 \end{aligned}$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} 2a + b &= 1 \\ -3a + -b &= 1 \end{aligned}$$

$$\implies a = -2 \wedge b = 5$$

Finalmente el resto de dividir $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)$ es igual a $-2x + 5$.
