

$$P_1 \mid D_0 = 1$$

$$D_1 = 0$$

$$\forall n \geq 2, D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

p.d.g- $\forall n \in \mathbb{N}$

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Por inducción:

CASE BASE: $n=0$ $\left[0! \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{k!} \right]$

$$= \frac{1 \cdot (-1)^0}{0!} = 1 = D_0$$

U.I Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, se cumple $\forall m \leq n$:

$$D_m = m! \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \quad (U.I.)$$

Paso inductivo Probar que $D_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$

En el caso:

$$D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1}) / n! E$$
$$= n \left(n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

$$= n \cdot n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= n \cdot n! \left(\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \right) + n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= n(-1)^n + n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot (n+1)$$

$$= n(-1)^n + (n+1)! \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\text{sumar } 0)$$

$$= n(-1)^n + (n+1)! \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}}_S - \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= n(-1)^n - (n+1)(-1)^n + (-1)^{n+1} + (n+1)! \cdot 5 \\
&= \cancel{n(-1)^n} - \cancel{n(-1)^n} - \cancel{(-1)^n} + \cancel{(-1)^n} + (n+1)! \cdot 5 \\
&= (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Luego, por inducción, se tiene

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad \square$$

b) Demnächst $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} (-1)^i = 1.$$

Für alle n :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} (-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{(n-i)-j}$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i \cdot (1+1)^{n-i}$$

$$= (2-1)^n = 1^n = 1 \quad \square$$

P2 | $(A, *)$ e.a. $\left\{ \begin{array}{l} * \text{ asociativa} \\ e \in A \text{ neutro.} \\ a \in A \text{ cancelable por } * \\ \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ es finito.} \end{array} \right.$

a) Demuestra qe $\exists i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i < j :$
 $a^i = a^j$

Por contradicción : Si $\forall i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i < j$,
 se tuviese $a^i \neq a^j$, entonces la función
 $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \{a^i : i \in \mathbb{N}\}$
 $i \mapsto \varphi(i) = a^i$

sería inyectiva :

$$\begin{aligned} i \neq j &\stackrel{\text{SP6}}{\Rightarrow} i < j \Rightarrow a^i \neq a^j \\ &\Rightarrow \varphi(i) \neq \varphi(j) \end{aligned}$$

Luego $|\mathbb{N} \setminus \{0\}| \geq |\{a^i : i \in \mathbb{N}\}|$ ~~×~~
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{es finito!}}$

b) Demuestra que existe $n \in \mathbb{N} : a^{n+1} = e$

En efecto, usando los, $i, j \geq 1$ anteriores

$$a^i = a^j$$

$$\Rightarrow a * a^{i-1} = a * a^{j-1} \quad / \text{a cancelable}$$

$$\Rightarrow a^{i-1} = a^{j-1}$$

$$\Rightarrow a * a^{i-2} = a * a^{j-2}$$

$$\Rightarrow a^{i-2} = a^{j-2}$$

$$\Rightarrow a^{\underset{\text{0}}{\overset{\text{0}}{i}}} = a^{\underset{\text{0}}{\overset{\text{0}}{j}}} = e$$

Luego, $n = j - i - 1$ cumple que $a^{n+1} = e$ $\square$

Concluya que a tiene inverso y determinelo.

$$a^{n+1} = e$$

$$\Leftrightarrow a * a^n = a^n * a = e$$

Luego $a^n = a^{j-i-1}$ es el inverso
de a : $a^{-1} = a^n$.

c) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Calculate

$$\sum_{k=1}^n \frac{k \binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$$

$$\frac{k \binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{k \cdot \cancel{n!}}{\cancel{k!} (n-k)!}$$

$$= \frac{\cancel{k} \cdot \cancel{(k-1)!} \cdot (n-k+1)!}{\cancel{k!} (n-k)!}$$

$$= \frac{(n-k+1)!}{(n-k)!} = \frac{\cancel{(n-k)!} (n-k+1)}{\cancel{(n-k)!}}$$

$$= n - k + 1$$

Luego $\sum_{k=1}^n \frac{k \binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \sum_{k=1}^n n - k + 1$

$$= \sum_{k=1}^n n + 1 - \sum_{k=1}^n k = n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \square$$

P3 | Determine neutro:

Additivo

Buscamos $(e_1, e_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ t.q. $\forall (a, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$(a, z) + (e_1, e_2) = (a, z)$$

$$\Leftrightarrow (a + e_1, z + e_2) = (a, z)$$

$$\Rightarrow e_1 = e_2 = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 ~~$\neq$~~ $\neq$

Multiplcativo | Buscamos $(h_1, h_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

t.q. $\forall (a, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$(a, z) \cdot (h_1, h_2) = (a, z)$$

$$\Leftrightarrow (ah_1, zh_2) = (a, z)$$

$$\Rightarrow h_1 = 1 \in \mathbb{R}, h_2 = 1 \in \mathbb{C}$$

Divisores de cero:

Sea $(a, z) \neq (0, 0)$. Buscamos
 $(b, w) \neq (0, 0)$ t. q.

$$(a, z) \cdot (b, w) = (0, 0).$$

$$\Leftrightarrow (ab, zw) = (0, 0)$$

Pero en $\mathbb{R}$, $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

y en $\mathbb{C}$ lo mismo (es dominio de integridad)

Luego $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, +, \cdot)$ no posee div
de 0.

Py | w raíz cúbica de $\mathbb{C}$, $w \neq 1$.

$$\begin{cases} z_1 = 1 + w \\ z_{n+1} = 1 + z_n^2 \end{cases}$$

Demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, z_n es raíz sexta de la unidad, distinta de $1, -1$.

Notar que w es raíz cúbica de 1 , las cuales son $w_0 = 1$, $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

y satisfacen $w_1^2 = w_2$, $w_2^2 = w_1$

Las raíces sextas de la unidad son

$$\begin{aligned} x_0 = 1, x_1 = e^{i\frac{2\pi}{6}}, x_2 = e^{i\frac{4\pi}{6}} \xrightarrow{\text{ } w_1} \\ x_4 = e^{i\frac{8\pi}{6}}, x_5 = e^{i\frac{10\pi}{6}}, x_3 = -1 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow w_2$

y satisfacen $x_1^2 = w_1$, $x_2^2 = w_2$, $x_4^2 = w_1$, $x_5^2 = w_2$.

Demostremos por inducción:

$n=1$ | Demostremos que $(1+\omega)^6 = 1$. En efecto

$$\begin{aligned}(1+\omega)^3 &= 1 + 3\omega + 3\omega^2 + \omega^3 \quad / \quad \omega \text{ raíz 3 de } 1 \\ &= 1 + 3\omega + 3\omega^2 \\ &= 3(1 + \omega + \omega^2) - 1\end{aligned}$$

y $1 + \omega + \omega^2 = 1 + \omega_1 + \omega_2 = 0$ (suma de raíces = 0)

$$\Rightarrow (1+\omega)^3 = -1$$

$$\Rightarrow (1+\omega)^6 = 1 \quad \square$$

Luego $1+\omega$ es raíz 6^{ta} de 1, y como $\notin \mathbb{R}$, $\notin \{-1, 1\}$.

H.3 | Para algún $n \in \mathbb{N}$, $z_n^6 = 1$.

Paso inductivo | Probar que $z_{n+1}^6 = 1$.

En efecto:

pues si z es raíz
enésima de 1,
 $\bar{z}$ también.

$$z_{n+1}^3 = \left(1 + \overline{z_n^2}\right)^3$$

$$= \left(1 + \bar{z}_n^2\right)^3$$

$$= 1 + 3\bar{z}_n^2 + 3\bar{z}_n^4 + \bar{z}_n^6$$

↑
 $\bar{z}_n$ raíz
6^{ta} de 1.

$$= 2 + 3\bar{z}_n^2 + 3\bar{z}_n^4$$

$$= 3(1 + \bar{z}_n^2 + \bar{z}_n^4) - 1$$

Recordemos

$$\begin{cases} X_1^2 = \omega_c \\ X_2 = \omega_1 \Rightarrow X_2^2 = \omega_1^2 = \omega_2 \\ X_4^2 = \omega_1 \\ X_5 = \omega_2 \Rightarrow \omega_5^2 = \omega_2^2 = \omega_1 \end{cases}$$

En cualquier caso $\bar{z}_n$ es raíz 6^{ta} de 1, con $\bar{z}_n \notin \{-1, 1\}$, y luego $\bar{z}_n = \omega_1$ o $\bar{z}_n = \omega_2$. Luego

$$3(1 + \bar{z}_n^2 + (\bar{z}_n^2)^2)$$

$$= 3(1 + \omega + \omega^2)$$

$$= 0.$$

y luego

$$(\bar{z}_{n+1})^3 = 0 - 1 = -1$$

$$\Rightarrow (1 + \bar{z}_n)^6 = 1 \Rightarrow \bar{z}_{n+1}^6 = 1$$

y luego $\bar{z}_{n+1}$ es raíz 6^{ta} de 1.

Por inducción, luego $\forall n \in \mathbb{N}$, z_n es la n -ésima potencia de la unidad $\square$

$$b) f: \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}:$$

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

(i) Encuentre la inversa de f y demuestre $f^{-1} = f(z)$.

$$w = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow w(z-i) = z+i$$

$$\Leftrightarrow wz - z = wi + i$$

$$\Leftrightarrow z(w-1) = wi + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{wi + i}{w-1} \Rightarrow f^{-1}(z) = \frac{(z+1)i}{z-1}$$

$$f(f(z)) = f\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{z+i}{z-i}\right) + i}{\frac{z+i}{z-i} - i}$$

$$= \frac{z+i+i(z-i)}{\cancel{(z-i)}} = \frac{z+i-i(z-i)}{\cancel{(z-i)}}$$

$$= \frac{z+i+iz-i^2}{z+i-iz+i^2} = \frac{z+i+iz+1}{z+i-iz-1}$$

$$= \frac{i(z+1) + z+1}{i(1-z) - (1-z)} = \frac{(i+1)(z+1)}{(i-1)(1-z)}$$

$$= \frac{(z+1)(1+i)}{(z-1)(1-i)} \quad \text{Notur ge}$$

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2} e^{i\pi/4} \\ 1-i &= \sqrt{2} e^{-i\pi/4} \Rightarrow \frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} \\ &= e^{i(\pi/4 + \pi/4)} \\ &= e^{i\pi/2} = i \end{aligned}$$

$$\text{Lsgo } f^{(2)}(z) = \frac{z+1}{z-1} i = f^{-1}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

(ii) Calcular $f^{(2021)}(-i)$

Notemos: $f^{(0)}(z) = \text{id}(z) = z$

$$f^{(1)}(z) = f(z)$$

$$f^{(2)}(z) = f^{-1}(z)$$

$$f^{(3)}(z) = f \circ f^{-1}(z) = z.$$

Inductivamente se puede probar que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(3n)}(z) = z.$$

$$f^{(3n+1)}(z) = f(z)$$

$$f^{(3n+2)}(z) = f^{-1}(z).$$

y luego: $2021 : 3 = 673$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 11 \\ -1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\text{Luego } 2021 = 3 \cdot 673 + 2$$

$$\Rightarrow f^{(2021)}(-i) = f^{-1}(-i)$$

$$= \frac{-i+1}{-i-1} \cdot i \quad \square$$

(iii) Muestre que la imagen de f de la circunferencia de centro i , radio 1 es una circunferencia de centro 1 . Calcule su radio.

Queremos demostrar: $f(C(i, 1)) = C(1, r)$

$\subseteq$ Sea $w \in f(C(i, 1))$
 $\Rightarrow \exists z \in C(i, 1) : f(z) = w$
 $(\Leftrightarrow \exists z : |z - i| = 1 : f(z) = w$

Vamos que $w \in C(1, r)$
 $(\Leftrightarrow |w - 1| = r.$
 $(\Leftrightarrow |f(z) - 1| = r.$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z+i}{z-i} - 1 \right| = \left| \frac{z+i - z+i}{z-i} \right|$$
$$= \left| \frac{2i}{z-i} \right| = \frac{|2i|}{|z-i|}$$

y como $|z - i| = 1$
 $\Rightarrow |f(z) - 1| = \frac{2}{1} = 2 = r.$

$$\boxed{\supset} \text{ Sea } z \in B(1, r) \\ \Leftrightarrow |z - 1| = 2$$

Verifiquemos $z \in f(C(i, 1))$

$$\Leftrightarrow \exists w \in C(i, 1) : z = f(w)$$

Tomando $w = f^{-1}(z)$ se tiene.

Verifiquemos $w \in C(i, 1)$:

$$\begin{aligned} & |f^{-1}(z) - i| \\ &= \left| \frac{z+i}{z-1} - i \right| = \left| \frac{z+i - i(z-1)}{z-1} \right| \\ &= \left| \frac{zi}{z-1} \right| = \frac{2}{2} = 1 \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{Luego } f(C(i, 1)) = C(1, 2) \quad \square$$

P5 | b) Factorice el polinomio x^3+1 en $\mathbb{C}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$

Por suma de cubos:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) \in \mathbb{R}[x]$$

Veamos las raíces x^2-x+1 :

$$x^2-x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Luego

$$x^3+1 = (x+1)\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right)$$

c) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación

$$z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$$

$$z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$$

$$(a) (z^3)^2 - 2iz^3 + 1 = 0$$

$$(b) (z^3 - i)^2 = 0$$

→ cada z tiene multiplicidad 2.

$$\Rightarrow z^3 - i = 0$$

$$(a) z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow z_k = e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} \rightarrow \text{mult } 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} \rightarrow \text{mult } 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \rightarrow \text{mult } 2. \end{cases}$$