MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar Extra Examen

15 de julio de 2021

P1. ***Sumatorias:***

a) Sea $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de números reales que cumple $D_0 = 1, D_1 = 0$ y $\forall n \geq 2, D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

b) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} (-1)^i = 1$$

c) Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Calcule:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$$

P2. ***Estructuras algebraicas:*** Sea $(A, *)$ una estructura algebraica tal que $*$ es asociativa y tiene un neutro $e \in A$. Para cada $a \in A$ se define

$$a^0 = e \text{ y, para cada } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a^i = a * a * \cdots * a \text{ (operado } i \text{ veces).}$$

Suponga que un elemento $a \in A$ es cancelable para $*$ y que el conjunto $\{a^i |\ i \in \mathbb{N}\}$ es finito.

a) Demuestre que existen $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, con $i < j$, tales que $a^i = a^j$.

b) Demuestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n+1} = e$.

c) Concluya que a tiene inverso y determine dicho inverso.

P3. ***Anillos y Cuerpos:*** Se sabe que $\mathbb{R} \times \mathbb{C} = \{(a, z) | a \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\}$, con las operaciones suma y producto definidas por:

$$(a, z) + (b, w) = (a + b, z + w) \qquad \forall (a, z), (b, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$
$$(a, z) \cdot (b, w) = (ab, zw) \qquad \forall (a, z), (b, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

es un anillo conmutativo. Determine el neutro para ambas operaciones. Además, encuentre todos los divisores de cero o demuestre que no existe ninguno.

P4. ***Complejos:***

a) Sea ω una raíz cúbica de la unidad distinta de 1. Considere la sucesión definida por $z_1 = 1 + \omega$ y $z_{n+1} = \overline{1 + z_n^2}$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, z_n es raíz sexta de la unidad, distinta de 1 y -1.

b) Considere la función $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definida por

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

I) Encuentre la inversa de f y demuestre que $f^{-1} = f^{(2)}$, donde $f^{(n)}$ es la composición de f consigo misma n veces, $n \in \mathbb{N}$.

II) Calcule $f^{(2021)}(-i)$.

III) Muestre que la imagen por f de la circunferencia de centro i y radio 1 es una circunferencia de centro 1. Encuentre su radio. *Indicación: La circunferencia de centro* $z_0 \in \mathbb{C}$ *y radio* $r > 0$ *es el conjunto* $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

P5. ***Polinomios:***

a) Sea Ω la relación en $\mathbb{C}[x]$ definida por:

$$P\Omega T \iff \exists Q \in \mathbb{C}[x], P(x) - T(x) = (x^3+1)Q(x)$$

I) Demuestre que Ω es una relación de equivalencia.

II) Encuentre $R \in [x^5 + x]_\Omega$ tal que $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(x^3+1)$

b) Factorice el polinomio $x^3 + 1$ en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$

c) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^6 - 2iz^3 - 1 = 0$, indicando la multiplicidad de cada raíz