PAUTA AUX #14

P1)

Como p tiene coeficientes enteros, tenemos una propiedad para sacar los candidatos a raíz:

si $\frac{r}{t} \in \mathbb{Q}$ es raíz de p, entonces

$$r \mid p_0 \qquad s \mid p_n$$

entonces,

$$r \mid -10 \qquad s \mid 2$$

$$\Rightarrow \quad r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$
$$s \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Luego, las posibilidades positivas y no enteras son:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{2}$$

Veamos con $\frac{1}{2}$:

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+19\cdot\frac{1}{2}-10$$

$$=\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{8}}+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{19}{2}}-\cancel{10}$$

$$=0$$

entonces, $\frac{1}{2}$ es raíz

Así, podemos dividir el polinomio por $x-\frac{1}{2}$:

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10 : x - \frac{1}{2} = 2x^3 + 2x + 20$$

$$\underline{-2x^4 + x^3}$$

$$0 + 2x^2 + 19x$$

$$\underline{-2x^2 + x}$$

$$20x - 10$$

$$\underline{-20x + 10}$$

$$0 //$$

Entonces, las raíces restantes son raíces del polinomio $2x^3 + 2x + 20$

$$= 2(x^3 + x + 10)$$

Luego, tenemos que los candidatos a ser raíz son los $\frac{r}{s}$ que cumplen

$r | 5 \quad \wedge \quad s | 1$

$\Rightarrow \quad r \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\} \quad s \in \{\pm 1\}$

Entonces, los candidatos enteros negativos son

$$-1, -2, -5, -10$$

Intentamos con -1:

$$(-1)^3 + (-1) + 10$$
$$= -1 - 1 + 10$$
$$= 8$$

no funciona

Con -2:

$$(-2)^3 + (-2) + 10$$
$$= -8 - 2 + 10$$
$$= 0$$

Entonces -2 es raíz, con lo que se procede a hacer la división por $x + 2$:

$$x^3 + x + 10 : x + 2 = x^2 - 2x + 5$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-x^3 - 2x^2} \\
-2x^2 + x \\
\underline{+2x^2 + 4x} \\
\qquad 5x + 10 \\
\qquad \underline{-5x - 10} \\
\qquad\qquad 0 //
\end{array}$$

Ahora, las otras 2 raíces se pueden calcular pues la ec. es cuadrática

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = -4$$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm 2i$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm 2i$$

Luego, la factorización en $\mathbb{R}$ es:

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(x^2-2x+5)$$

y en $\mathbb{C}$:

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)(x-1-2i)(x-1+2i)$$

//

P2)

Sean α, β, γ las raíces de p. Entonces, como es mónico, se puede factorizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p(z) &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= (x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta)(x-\gamma) \\ &= x^3-\gamma x^2-(\alpha+\beta)x^2+\gamma(\alpha+\beta)x \\ &\quad +\alpha\beta x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

$$= x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

Como los polinomios son iguales, tienen que tener los mismos coeficientes.

Entonces,

$$\alpha+\beta+\gamma = -a$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = b$$

$$\alpha\beta\gamma = -c \qquad \blacksquare$$

Sea α la raíz no real tal que

$|\alpha| = 4$

$\Rightarrow$ $\bar{\alpha}$ también es raíz

Luego, denotamos γ la raíz faltante.

Entonces, por lo recién demostrado

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \gamma = 112$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2 \gamma = 112$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{112}{16} = 7$$

solo queda dividir el polinomio por $z-7$ y calcular el resto de las raíces

$$z^3 - 11z^2 + 44z - 112 : z-7 = z^2 - 4z + 16$$

$$\begin{array}{l}
z^3 - 11z^2 + 44z - 112 \\
\underline{-z^3 + 7z^2} \\
\quad -4z^2 + 44z \\
\quad \underline{+4z^2 - 28z} \\
\qquad 16z - 112 \\
\qquad \underline{-16z + 112} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Luego, el resto de las raíces son

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 16\cdot 1}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{16\cdot(-3)}}{2}$$

$$= 2 \pm \frac{4\sqrt{-3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}\, i$$

P3

Sean $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$

Si probamos que las raíces de q son también raíces de p, entonces, al ser mónicos, la factorización de q será parte de la factorización de p.

Sea α una raíz de q

Entonces,

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = 1$$

es decir, α es una raíz de la unidad.

Evaluando α en p se obtiene

$$p(\alpha) = \alpha^{3n_1} + \alpha^{3n_2+1} + \alpha^{3n_3+2}$$

$$= \underbrace{(\alpha^3)}_{1}^{n_1} + \underbrace{(\alpha^3)}_{1}^{n_2} \cdot \alpha + \underbrace{(\alpha^3)}_{1}^{n_3} \cdot \alpha^2$$

$$= 1 + \alpha + \alpha^2 = 0$$

Con lo que, por lo dicho al principio, se tiene que $q \mid p$ $\blacksquare$

P4

Considerando el hint, notamos que

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \cdot \cancel{1^{2n-k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad (i)$$

Por otro lado,

$$(x+1)^n (x+1)^n$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot \cancel{1^{n-k}} \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \cancel{1^{n-j}} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{j} x^{k+j} \quad (ii)$$

Notamos que los polinomios (i) y (ii) son iguales, entonces, sus coeficientes también.

Se calcula el coeficiente que acompaña a x^n:

En (i) es claro que el coeficiente es

$$\binom{2n}{n}$$

Mientras que en (ii) son los coef tq $k+j=n$ los cuales se obtienen con

$$(k,j) \in \{(0,n),(1,n-1),\ldots,(1,n-1),(0,n)\}$$

Por lo tanto, el coeficiente es

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 \qquad \blacksquare$$

P5

Sabemos que $p(\alpha)$ es el resto de p al dividirlo por $x-\alpha$. Entonces, como el resto es 3 al dividirlo por $x-1$, se obtiene que

$p(1) = 3$

$\Rightarrow \alpha - 1 + \beta + 10 - 2\alpha = 3$

$\Rightarrow \alpha - \beta = 6$

Ahora, llamamos $q(x)$ al cociente obtenido al dividir por $x-1$.

Por el teorema de la división de polinomios

$$p(x) = q(x)(x-1) + 3$$

$$\Rightarrow p(2) = q(2)(2-1) + 3$$
$$= 21 \cdot 1 + 3 = 24$$

Entonces

$$\alpha \cdot 2^4 - 2^3 + \beta \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 2\alpha = 24$$

$$\Rightarrow 16\alpha - 8 + 4\beta + 20 - 2\alpha = 24$$

$$\Rightarrow 14\alpha + 4\beta = 12$$

$$\Rightarrow 7\alpha + 2\beta = 6$$

Resolviendo el sistema

$$\alpha - \beta = 6$$

$$\Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 12$$

$$\Rightarrow 9\alpha = 18 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\Rightarrow \beta = -4$$

P6)

Mismo procedimiento que P2

P7)

Aplicando el teorema de la división

$\exists\ Q_1(x),\ Q_2(x)$ con $gr(Q_i) < gr(P)$
$i \in \{1,2\}$

tal que

$$P(x) = (x-a)\,Q_1(x) + A$$

$$P(x) = (x-b)\,Q_2(x) + B$$

Ahora, $\exists\ Q_3(x)$ con $gr(Q_3) < gr(P)$

y $R(x)$ con $gr(R) < gr((x-a)(x-b))$
$= 2$

tal que

$$P(x) = (x-a)(x-b)\,Q_3(x) + R(x)$$

Como $gr(R) < 2$, existen

$r, s \in \mathbb{R}$ tq

$$R(x) = rx + s$$

Entonces,

$$P(x) = (x-a)(x-b)\,Q_3(x) + rx + s$$

$$\Rightarrow \quad P(a) = ra + s$$

$$P(b) = rb + s$$

y por teorema del resto, se tiene que

$$P(a) = A \quad \wedge \quad P(b) = B$$

$$\Rightarrow \quad A = ra + s$$

$$B = rb + s$$

$$\Rightarrow \quad A - B = ra - rb$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{A-B}{a-b}$$

Reemplazando

$$A = \left(\frac{A-B}{a-b}\right)a + s$$

$$\Rightarrow \quad s = A - \left(\frac{A-B}{a-b}\right)a$$

Finalmente, se tiene que

$$R(x) = \left(\frac{A-B}{a-b}\right)x + A - \left(\frac{A-B}{a-b}\right)a$$

//