MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 14 - Polinomios

9 de julio de 2021

P1. Sea $p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$ Encuentre todas sus raíces sabiendo que tiene una raíz racional, no entera, positiva y otra entera negativa. Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$.

P2. . Sea $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Pruebe que:

$$\alpha\beta\gamma = -c,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = b, \text{ y } \alpha + \beta + \gamma = -a$$

y úselo para encontrar las raíces del polinomio $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$ sabiendo que una de sus raíces no es real y tiene módulo 4.

P3. Sean $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$ y $q(x) = x^2 + x + 1$, demuestre que para $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N},\ p(x)$ es divisible por $q(x)$.

P4. Demuestre sin usar inducción que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Hint: Observe la siguiente igualdad de polinomios $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$

P5. Al dividir el polinomio $p(x) = \alpha x^4 - x^3 + \beta x^2 + 10x - 2\alpha$ por $(x-1)$ el resto es 3 y el cuociente toma el valor 21 para $x = 2$. Calcule α y β.

P6. Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determina todas las soluciones (en $\mathbb{C}$) de la ecuación.

P7. Sea $P(x)$ un polinomio que tiene resto A cuando se lo divide por $(x-a)$ y tiene resto B cuando se lo divide por $(x-b)$. Encuentre el resto $R(x)$ cuando el polinomio es dividido por $(x-a)(x-b)$. Suponga que $a \neq b$.

Resumen

- **[Polinomio]**: Si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ cuerpo, llamamos polinomio en $\mathbb{K}$ (denotado $p \in \mathbb{K}[x]$) a una función:

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longrightarrow & p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k \end{array}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $p_k \in \mathbb{K}$ constantes.

- **[Igualdad de polinomios]**: Si $p \in \mathbb{K}[x]$ y $q \in \mathbb{K}[x]$ con $p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^k$ entonces:

$$p = q \Leftrightarrow (n = m \wedge \forall k \in \{0, ..., 1\},\ p_k = q_k$$

- **[Grado]**: Si $p \in \mathbb{K}[x]$ con $p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ llamamos $gr(p) = n$ con n el mayor numero tal que $p_n \neq 0$. Si $p(x) = 0$ definimos $gr(P) = -\infty$.
Obs.: Si $p_n = 1$, p se dira polinomio mónico.

- **[Anillo de polinomios]**: Si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es cuerpo, entonces $(\mathbb{K}[x],+,\cdot)$ es anillo conmutativo que no posee divisores de 0.

- **[Suma y producto de polinomios]**: Si $p, q \in \mathbb{K}[x]$ con $gr(p) = n$ y $gr(q) = m$ entonces $gr(p + q) \leq \max\{n, m\}$ con:

$$(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (p_k + q_k) x^k$$

Además $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$.

- **[Inversos]**: En $(\mathbb{K}[x],+,\cdot)$ los únicos polinomios con inversos son los de grado 0.

- **[Teorema de la División]**: Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que
  1. $p = q \cdot d + r$
  2. $gr(r) < gr(d)$

  Obs.: A q se le llama cociente, a r resto, y d divisor de p con resto r.

- **[Teorema del resto]**: Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir P por el polinomio $(x-c)$ es exactamente $p(c)$

- **[Raíz]**: $c \in \mathbb{K}$ es raíz de $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.

- **[Prop raíces]**: $c \in \mathbb{K}$ es raiz de $p \in \mathbb{K}[x] \Leftrightarrow (x - c)|p(x)$ (el resto es 0).
Definimos $\mathcal{Z}(p)$ como el conjunto de raíces de p.

- **[Prop varias]**:
  1. Si $c_1, c_2, ..., c_k$ raíces distintas de p entonces $(x - c_1)(x - c_2)...(x - c_k)|p(x)$.
  2. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ con $gr(p) = n \geq 1$ entonces p posee a lo más n raíces distintas.
  3. Sean $n \geq 0$ y $p, q \in K[x]$ con $gr(p) \leq n$ y $gr(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n+1$ puntos, entonces son iguales.

- **[TFA (D'Alembert)]**: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$ entonces p posee al menos una raíz en $\mathbb{C}$.
Se deduce mediante esto que el polinomio p debe poseer n raíces en $\mathbb{C}$.

- **[Factorización compleja]**: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$ entonces existen $\alpha, c_1, ..., c_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, ..., l_m \geq 1$ tales que $gr(p) = l_1 + ... + l_m$ y:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} ... (x - c_m)^{l_m}$$

- **[Raíz conjugada]**: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ tiene todos sus coeficientes reales, y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P entonces $\overline{z}$ es también raíz de p.

- **[Factorización real]**: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$, entonces existen $\alpha, c_1, ..., c_m, p_1, q_2, ..., p_s, q_s \in \mathbb{R}$ tales que:

$$p(x) = \alpha(x-c_1)..(x-c_m)(x^2+p_1x+q_1)..(x^2+p_sx+q_s)$$

Donde c_k son las raíces del polinomio y $(x^2 + p_1 x + q_1), ..., (x^2 + p_s x + q_s)$ no tienen raíces reales, y $\alpha = p_n$ en p.

- **[Coeficientes enteros]**: Sea $p \in \mathbb{R}[x]$. si $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (r y s primos relativos) es una raíz de p entonces $r|p_0$ y $s|p_n$.

- **[Ultima propiedad]**: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ es mónico, con coeficientes $p_0, ..., p_{n-1} \in \mathbb{Z}$ entonces toda raíz racional de p es entera y divide a p_0.