

MA1101-7 Introducción al Álgebra**Profesor:** Pablo R. Dartnell R.**Auxiliares:** Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras**Auxiliar 13 - Números Complejos**

7 de julio de 2021

P1. [A cartesiana y polares]:

Escriba en su forma cartesiana y polar los siguientes complejos:

$$a) (1-i)^4(1+i)^4 \quad b) \frac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}} \quad c) \frac{1}{1+i} \quad d) \frac{1}{e^i+i}$$

P2. [Imaginando]: Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ y $\text{Im}(z) > 0$. Demuestre que:

$$\text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0$$

P3. [Realizando]: Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| = 1$ y $z^{2n} \neq -1$. Demuestre que:

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbb{R}$$

P4. [Raíces de la unidad]:

- a) Pruebe que el producto de las n raíces n -ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$.
 b) Sea $w \neq 1 \in \mathbb{C}$ una raíz cubica de la unidad. Pruebe que:

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

P5. [¿¿¿¿¿a¿¿¿¿]: Sean z_1, z_2 las soluciones de $z^2 - 2z + 2 = 0$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ (salvo múltiplos enteros de n) se tiene:

$$\frac{(\cot(\theta) + z_1 - 1)^n - (\cot(\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \sin(n\theta)(\csc(\theta))^n$$

Resumen

- **[Cuerpo]**: Una estructura $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se llamará cuerpo si:

- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo.
- Todo elemento en $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

Equivalentemente $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ será cuerpo si y solo si:

- $(\mathbb{K}, +)$ es grupo abeliano.
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano.
- $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.

- **[Caracterización cuerpos finitos]**: Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo, entonces $\mathbb{K}$ no tiene divisores de 0 ($\mathbb{K}$ es dominio de integridad).

El recíproco se tiene si $|\mathbb{K}|$ es finito, es decir:

Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es dominio de integridad con $|\mathbb{K}|$ finito, entonces $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo.

- **[Formalidad]**: Identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, de manera que se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ para $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$ por:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

- **[Unidad Imaginaria]**: Se define $i = (0, 1)$
- **[Forma cartesiana]**: La expresión $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ es la forma cartesiana de $z = (a, b)$.

Además se define:

- $Re(z) = a$ (Parte real)
- $Im(z) = b$ (Parte imaginaria)

- **[Coordenadas Polares]**: Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se define el par $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ donde:

- r es la distancia de z al origen, se llama módulo de z y se anota $r = |z|$.
- θ es el ángulo que se forma entre el eje X (real) y el segmento que une el origen con z . Se llama argumento (principal) de z y se anota $arg(z)$.

- **[Forma polar]**: Para $\theta \in \mathbb{R}$ anotamos $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. La expresión $|z|e^{iarg(z)}$ es la forma polar de z .

- **[Props varias]**:

$$\text{I) } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+\beta}$$

$$\text{II) } |zw| = |z| \cdot |w|$$

$$\text{III) } arg(zw) \equiv arg(z) + arg(w) \pmod{2\pi}$$

$$\text{IV) } |z^k| = |z|^k$$

$$\text{V) } (e^{i\theta})^k = e^{i(k\theta)}$$

- **[Conjugado]**: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define $\bar{z} = a - bi$

- **[Desigualdad triangular]**: Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$.

- **[Raíces]**: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raíz n -ésima de w si $z^n = w$.

- **[Soluciones]**: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, si $w = re^{i\theta}$ (forma polar) entonces la ecuación $z^n = w$ tiene n soluciones, dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{(\theta + 2\pi k)}{n}}$$

- **[Prop]**: Sean $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \geq 2$, entonces la suma de las raíces n -ésimas vale 0:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$$

- **[Muchas propiedades]**: Sean $z, w \in \mathbb{C}$

$$\text{a) } \bar{\bar{z}} = z.$$

$$\text{b) } z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}.$$

$$\text{c) } \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \text{ y } \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}.$$

$$\text{d) } \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}. \text{ Si } w \neq 0 \left(\frac{\bar{z}}{w} \right) = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

$$\text{e) Si } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ entonces } \overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}.$$

$$\text{f) } Re(z) = Re(\bar{z}) \text{ y } Im(z) = -Im(\bar{z}).$$

$$\text{g) } Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ y } Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\text{h) Si } z \neq 0, \text{ entonces } z^{-1} = \frac{1}{|z|} e^{-iarg(z)}$$

$$\text{i) } |z| = |\bar{z}|$$

$$\text{j) } arg(\bar{z}) = 2\pi - arg(z)$$

$$\text{k) } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\text{l) Si } z \neq 0, \text{ entonces } z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

$$\text{m) Si } w \neq 0, \text{ entonces } \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$