MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 12 - Anillos y Cuerpos

25 de junio de 2021

P1. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad, demuestre que si a es divisor de cero, entonces no es invertible.

P2. Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad, $I \subseteq R$ se dirá Ideal de R si:

- $(I, +)$ es subgrupo de $(R, +)$
- $(\forall r \in R)(\forall x \in I)\ r \cdot x \in I$

(a) Dado $a \in R$ se define el aniquilador de a como $Ann(a) = \{r \in R : r \cdot a = 0\}$
Demuestre que Ann(a) es un ideal de R.

(b) Sea I ideal de R, demuestre que si $\exists x \in I$ invertible, entonces $I = R$.

P3. Sean $(A, +, \cdot)$ y $(A_0, \oplus, \odot)$ dos anillos con neutros aditivos 0, $0'$ y unidades 1, $1'$, respectivamente, y $f : A \longrightarrow A_0$ un homomorfismo de anillos. Se define $I = \{x \in A : f(x) = 0'\}$.

(a) Demuestre que $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$.

(b) Demuestre que $\forall a \in A,\ \forall b \in I,\ a \cdot b \in I \wedge b \cdot a \in I$.

(c) Si $\exists x \in I$ tal que x es invertible. Demuestre que $A = I$.

(d) Demuestre que si $(A, +, \cdot)$ es cuerpo, entonces f es inyectiva o $f \equiv 0$.

Resumen

- **[Anillo]**: Una e.a. $(A, +, \cdot)$ se llamará anillo si:
  - $(A, +)$ es grupo abeliano.
  - $\cdot$ es asociativa y posee elemento neutro en $A \setminus \{0\}$.
  - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.

  En el caso de ser $\cdot$ conmutativo, $(A, +, \cdot)$ será anillo conmutativo.
- **[Morfismos de anillos]**: $f : A \to B$ Sera morfismo entre dos anillos $(A, +_A, \cdot_A)$ y $(B, +_B, \cdot_B)$ si:

$$f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$$
$$f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$

- **[Algebra en anillos]**: Si $(A, +, \cdot)$ es anillo y $x, y \in A$:
  - $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
  - $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
  - $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
  - $-x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$
- **[Potencias y múltiplos]:** Sea $(A, +, \cdot)$ anillo. Para $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$ se definen recursivamente potencias y múltiplos de a, denotados a^n y $n \cdot a$, respectivamente.
  - $a^0 = 1$, y $a^{n+1} = a^n \cdot n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Si a posee inverso a^{-1}, entonces $a^{-n} = (a^{-1})^n$.
  - $0 \cdot a = 0, (n+1) \cdot a = n \cdot a + a, (-n) \cdot a = n \cdot (-a) \ \forall n \in \mathbb{N}$
- **[Propiedades conocidas en anillos]:** Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo.
  - $\forall k, l \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in A, k(a + b) = ka + kb, (k + l)a = ka + la, (ka)(lb) = (kl)(ab)$
  - *[Suma geométrica]:* $\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n} x^k$
  - *[Binomio de Newton]:* Cuando el anillo es conmutativo, $\forall x, y \in A, \forall n \in \mathbb{N}, (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- **[Cuerpo]**: Una estructura $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se llamará cuerpo si:
  - $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es anillo conmutativo.
  - Todo elementos en $K \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

  Equivalentemente $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ sera cuerpo si y solo si:
  - $(\mathbb{K}, +)$ es grupo abeliano.
  - $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano.
  - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- **[Caracterización cuerpos finitos]**: Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo, entonces $\mathbb{K}$ no tiene divisores de 0 ($\mathbb{K}$ es dominio de integridad).
  El reciproco se tiene si $|\mathbb{K}|$ es finito, es decir:
  Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es dominio de integridad con $|\mathbb{K}|$ finito, entonces $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo.