

PAUTA AUX EXTRA C2

P1)

Tenemos la siguiente propiedad

Prop la cantidad de múltiplos de k en el conjunto $\{1, \dots, n\}$ es $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$

Con esto, se obtiene que

$$|C| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$$

$$|D| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$$

Además

$$\begin{aligned} C \cap D &= \{n \in E \mid n \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y de } 7\} \\ &= \{n \in E \mid n \text{ es múltiplo de } \text{mcm}(3, 7)\} \\ &= \{n \in E \mid n \text{ es múltiplo de } 21\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |C \cap D| = \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47$$

Entonces

$$\begin{aligned}|C \cup D| &= |C| + |D| - |C \cap D| \\&= 333 + 142 - 47 \\&= 428\end{aligned}$$

Ahora, calculamos lo que nos piden:

Primero,

$$\begin{aligned}|C \Delta D| &= |(C \cup D) \setminus (C \cap D)| \\&= |C \cup D| - |C \cap D| \quad \text{por } C \cap D \subseteq C \cup D \\&= 428 - 47 \\&= 381\end{aligned}$$

Segundo,

$$\begin{aligned}C \setminus (C \cap D) &= C \cap (C \cap D)^c \\&= C \cap (C^c \cup D^c) \\&= (\cancel{C \cap C^c}) \cup (C \cap D^c) \\&\quad \phi \\&= C \cap D^c \\&= C \setminus D\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |C \setminus D| &= |C \setminus (C \cap D)| \\ &= |C| - |C \cap D| \quad \text{pues } C \cap D \subseteq C \\ &= 333 - 47 \\ &= 286 \end{aligned}$$

Finalmente, $\hookrightarrow$ conjunto finito

$$\begin{aligned} |(C \Delta D) \times (C \setminus D)| &= |C \Delta D| \cdot |C \setminus D| \\ &= 381 \cdot 286 \\ &= 108.966 \end{aligned}$$

P2 (a)

Se tiene que

$$A + B = \bigcup_{b \in B} \{a + b \mid a \in A\}$$

Llamemos $N_b = \{a + b \mid a \in A\}$

Sea $b \in B$ y sea $f: A \longrightarrow N_b$
 $a \longmapsto a+b$

Iny | Sea $a_1, a_2 \in A$ tq

$$f(a_1) = f(a_2)$$

$$\Rightarrow a_1 + \cancel{b} = a_2 + \cancel{b}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 //$$

Epi | Sea $a+b \in N_b$. Basta tomar

$x = a (\in A)$ y se tiene que

$$f(x) = x+b = a+b //$$

$$\text{Entonces } |A| = |N_b|$$

$$\Rightarrow N_b \text{ es numerable } \forall b \in B$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\substack{b \in B \\ \text{unión} \\ \text{numerable}}} N_b \text{ es unión numerable de} \\ \text{numerales}$$

$$\Rightarrow A+B \text{ es numerable} \quad \square$$

(b)

Como $|B| = |C| \Rightarrow \exists \varphi: B \rightarrow C$
biyectiva.

Sea $f: A \cup B \rightarrow A \cup C$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ \varphi(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Notamos que la función está bien
definida, pues $A \cap B = \emptyset$

iny

Sea $x_1, x_2 \in A \cup B$

Caso 1 $x_1 \in A \wedge x_2 \in A$

si $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2 //$

Caso 2 $x_1 \in A \wedge x_2 \in B$

Notamos que $f(x_1) = x_1 \in A$

$$f(x_2) = \varphi(x_2) \in C$$

Como $A \cap C = \emptyset$, entonces

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \text{F}$$

con lo que se cumple, trivialmente, la
inyectividad //

Caso 3 $x_1 \in B \wedge x_2 \in A$

Análogo al caso 2 //

Caso 4 $x_1 \in B \wedge x_2 \in B$

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

pues φ es inyectiva

Entonces, se tiene que f es inyectiva

Epi

Sea $y \in A \cup C$.

Caso 1 $y \in A$

dominio

Basta tomar $x = y$ ($\in A \subseteq A \cup B$)

y se tiene que

$$f(x) = x = y //$$

Caso 2 $y \in C$

Basta tomar $x = \varphi^{-1}(y)$ ($\in B \subseteq A \cup B$)

y se tiene que

$$f(x) = \varphi(x) = \varphi(\varphi^{-1}(y)) = y //$$

Entonces, f es epyectiva

$\Rightarrow f$ es biyectiva

$$\Rightarrow |A \cup B| = |A \cup C|$$



(c) En efecto,

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(\mathbb{N}) \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{n\}) \end{aligned}$$

Entonces, A es unión numerable de
numerales

$\Rightarrow A$ es numerable $\square$

P3

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k^2} \frac{n+k^2}{(n+j-1)(n+j)}$$

$$= \sum_{k=1}^n (n+k^2) \sum_{j=1}^{k^2} \frac{1}{(n+j-1)(n+j)}$$

Usando fracciones parciales

$$\frac{1}{(n+j-1)(n+j)} = \frac{A}{n+j-1} + \frac{B}{n+j}$$

$$\Rightarrow 1 = A(n+j) + B(n+j-1)$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)j + (A+B)n - B$$

n es fijo en esta expresión, pero la sumatoria depende de j

$$\Rightarrow A+B=0 \wedge (A+B)n - B = 1$$

$$\Rightarrow A+B=0 \wedge -B=1$$

$$\Rightarrow A=1 \wedge B=-1$$

siguiendo con la suma

$$= \sum_{k=1}^n (n+k^2) \sum_{j=1}^{k^2} \left[\underbrace{\frac{1}{n+j-1}}_{a_{j-1}} - \underbrace{\frac{1}{n+j}}_{a_j} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n (n+k^2) \left[\frac{1}{\cancel{n+1}-\cancel{1}} - \frac{1}{n+k^2} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{n+k^2}{n} - \frac{n+k^2}{\cancel{n+k^2}} \xrightarrow{1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \cancel{1} + \frac{k^2}{n} - \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

==

P4

Separando por pares e ímpares:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3 + (-1)^k)^k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3 + \cancel{(-1)}^{2n})^{2n}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3 + \cancel{(-1)}^{2n-1})^{2n-1}}$$

$\downarrow$
1 $\downarrow$
-1

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^{2n}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{16^n} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{16}\right)^n + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{16} - 1} + 2 \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} \right]$$