

MA1101-7 Introducción al Álgebra**Profesor:** Pablo R. Dartnell R.**Auxiliares:** Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras**Auxiliar Extra C2**

23 de junio de 2021

Formas de probar que un conjunto A es numerable

- Encontrar una biyección entre A y \mathbb{N} .
- Demostrar que $A \subseteq \mathbb{N}$ y que A es infinito.
- Encontrar una inyección entre A y \mathbb{N} y demostrar que A es infinito.
- Demostrar que A es producto cartesiano finito de conjuntos numerables.
- Demostrar que A es una unión numerable (o finita) de conjuntos numerables.

Obs 1: se puede cambiar \mathbb{N} por cualquier numerable y todo lo anterior es válido.

Obs 2: en algunos problemas se combinan las técnicas de arriba

P1. Considere el conjunto de referencia $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1000\}$ y los conjuntos $C = \{n \in E \mid n \text{ es múltiplo de } 3\}$, $D = \{n \in E \mid n \text{ es múltiplo de } 7\}$. Determine el cardinal de $(C \Delta D) \times (C \setminus D)$.

P2. (a) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos numerables. Pruebe que el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ es numerable.

(b) Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que $|A \cap B| = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $|B| = |C|$. Demuestre que $|A \cup B| = |A \cup C|$

(c) Sea A un conjunto y $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ una función. Demuestre que si $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-1}(\{n\})$ es numerable, entonces A es numerable.

P3. Calcule:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k^2} \frac{n + k^2}{(n + j - 1)(n + j)}$$

P4. Sea $n \in \mathbb{N}$ positivo. Calcule:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3 + (-1)^k)^k}$$