P1) Sea $G = (-1,1) \subseteq \mathbb{R}$, $*$ lci:

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab} \quad \forall a,b \in G$$

Demuestre que $(G, *)$ grupo abeliano

0) l.c.i.) Sean $a, b \in G$

$$\Rightarrow a, b \in (-1,1) : \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow -2 < a+b < 2 \\ \Rightarrow -1 < ab < 1 \\ \Rightarrow 0 < 1+ab < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{1+ab} \in G.$$

a) $\star$ asociat Probemos $\forall a,b \in G$, $a\star(b\star c)=(a\star b)\star c$

$$(a\star b)\star c = \left(\frac{a+b}{1+ab}\right)\star c$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)+c}{1+\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)c}$$

$$= \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+ab}}{\frac{1+ab+ac+bc}{1+ab}}$$

$$= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

¡iguales!

$$a\star(b\star c) = a\star\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)$$

$$= \frac{a+\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)}{1+a\left(\frac{b+c}{1+bc}\right)}$$

$$= \frac{\frac{a+abc+b+c}{1+bc}}{\frac{1+bc+ab+ac}{1+bc}} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

Luego son iguales $\forall a,b,c \in G$.

$\Rightarrow$ $*$ asociá.

2) Tiene neutro | Encontrémoslo: Sea $e \in G$

t.q. $a * e = a$

$$\Leftrightarrow \frac{a+e}{1+ae} = a \Leftrightarrow a+e = a(1+ae)$$
$$\Leftrightarrow a+e = a + a^2 e$$
$$\Leftrightarrow e - a^2 e = 0$$
$$\Leftrightarrow e(1-a^2) = 0$$
$$\Rightarrow e = 0.$$

y en efecto $e \in G$.

En lugar de ver si es neutro por la izq, probemos que $*$ conmuta: (3)

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab} = \frac{b+a}{1+ba} = b * a.$$

$\Rightarrow$ $*$ conmuta

Por último:

4) Todo elemento posee inverso: En efecto,

si $a \in G$, $a \in (-1,1) \Rightarrow -a \in (-1,1) = G$

y se tiene que

$$a * -a = \frac{a+(-a)}{1+a(-a)} = \frac{0}{1-a^2} = 0 = e$$

Luego todo elemento en G posee inverso.

Luego $\left\{\begin{array}{l}\text{asocia} \\ \text{neutro} \\ \text{inversos}\end{array}\right. \Rightarrow (G,*)$ grupo

y $(G,*)$ grupo $\wedge$ $*$ conmuta $\Rightarrow (G,*)$ grupo abeliano.

P2 | Sea $\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ biyectiva} \}$

$\mathcal{A} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 :$
$f(x) = ax + b \}$

(a) Demuestre que $(A, \circ)$ es subgrupo de $(\mathcal{F}, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones:

$A \neq \emptyset$ | $id_{\mathbb{R}}(x) = x \in \mathcal{A}$, con $a = 1 \neq 0$, $b = 0$.

Sean $f, g \in \mathcal{A}$: $f(x) = a_1 x + b_1$
$g(x) = a_2 x + b_2$

Probemos que $f \circ g^{-1} \in \mathcal{A}$. En efecto.

$$g(x) = y = a_2 x + b_2$$
$$\iff y - b_2 = a_2 x \quad / : a_2 \neq 0$$
$$\iff \frac{1}{a_2} y - \frac{b_2}{a_2} = x$$

Luego $g^{-1}(x) = \frac{1}{a_2} x - \frac{b_2}{a_2}$.

Veamos que $f \circ g^{-1}$ es una recta, en efecto:

$$f(g^{-1}(x))$$
$$= f\left(\frac{1}{a_2}x - \frac{b_2}{a_2}\right)$$

$$= a_1\left(\frac{1}{a_2}x - \frac{b_2}{a_2}\right) + b_1 = \frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_1 b_2}{a_2} + b_1$$

Como $a_1, a_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq 0$. Luego,

si $\tilde{a} = \frac{a_1}{a_2}$, $\tilde{b} = b_1 - \frac{a_1 b_2}{a_2}$

$$\Rightarrow (f \circ g^{-1})(x) = \tilde{a}x + \tilde{b}, \quad a \neq 0, \ b \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f \circ g^{-1} \in A.$$

(b) Demuestre que $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$

Tenemos que encontrar φ biyectiva t.q.

$$\varphi(f \circ g) = \varphi(f) * \varphi(g)$$

Veamos $f \circ g$: si $f(x) = ax+b$

$$g(x) = cx+d$$

$$f \circ g(x) = f(cx+d)$$
$$= a(cx+d)+b$$
$$= acx + ad+b$$

Necesitamos $*$ lci en $\mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$ t.q.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad+b \end{pmatrix}$$

Es claro que es lci: si $a, c \neq 0 \Rightarrow ac \neq 0$.

y $a, b, d \in \mathbb{R} \Rightarrow ad+b \in \mathbb{R}$.

El morfismo es obvio:

$$\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$$
$$f(x) = ax+b \longmapsto \varphi(f) = (a, b)$$

Verifiquemos que es morfismo: Si $f, g \in \mathcal{A}$, $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$:

$$\varphi(f \circ g) = \begin{pmatrix} ac \\ ad+b \end{pmatrix};$$

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \varphi(g) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\varphi(f) * \varphi(g) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ac \\ ad+b \end{pmatrix}$$

Luego $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) * \varphi(g)$

Falta verificar biyectividad:

<u>INY</u>) Sean $f, g \in \mathcal{A}$ t.q.

$$\varphi(f) = \varphi(g)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = ax+b = cx+d = g(x)$$

y como dom f = dom g, codom f = codom g

$\Rightarrow f = g.$

EP | Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$. Si nos damos la función $r(x) = ax + b$ tenemos que $r \in \mathcal{A}$ ($a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, función lineal), y además $\varphi(r) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Luego $\forall y \in \text{codom}\,\varphi \; \exists x \in \text{dom}\,\varphi : \varphi(x) = y$

$\Leftrightarrow \varphi$ epiyectiva.

Luego φ morfismo $\wedge$ φ biyectiva

$\Rightarrow \varphi$ isomorfismo

$\Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$

(c) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ no es isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$

En efecto si fuesen isomorfos, existiría $\mathbb{Z} \xleftarrow{\varphi} \mathbb{Q}$ t.q. $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$:

$$\varphi(q_1 + q_2) = \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$$

Como es epiyectivo, $\exists x \in \mathbb{Q} : \varphi(x) = 1$.

Luego

$$1 = \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \times \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

P3) Sea $(G, *)$ grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Pruebe que:

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$

$H * K \neq \emptyset$) En efecto, como H, K subgrupos de G, $\Rightarrow e \in H, e \in K$ (con e neutro de G).

Luego $e * e \in H * K \Rightarrow e \in H * K$
$\Rightarrow H * K \neq \emptyset$.

$\forall x, y \in H * K, \quad x * y^{-1} \in H * K$.

Sean $x, y \in H * K$:

$$x = h_x * k_x \qquad , h_x, h_y \in H; k_x, k_y \in K$$
$$y = h_y * k_y$$

Como $h_y, k_y \in G$, poseen inversos:

$$y^{-1} = (h_y * k_y)^{-1} = k_y^{-1} * h_y^{-1}$$

entonces $x * y = (h_x * k_x) * (k_y^{-1} * h_y^{-1})$

Como $*$ conmuta y asocia

$$= (h_x * h_y^{-1}) * (k_x * k_y^{-1})$$

Como $h_x, h_y \in H$ subgrupo

$\Rightarrow h_x * h_y^{-1} \in H$

y Análogamente

$\Rightarrow k_x * k_y^{-1} \in K$

Luego $(h_x * h_y^{-1}) * (k_x * k_y^{-1}) \in H * K$

$\Leftrightarrow x * y \in H * K$

$\Rightarrow H * K$ es subgrupo de G.

P4 | $(A,+,\cdot)$ anillo conmutativo

(a) Si $a\in A$ divisor de cero y $b\in A$ t.q. $a\cdot b\neq 0$, entonces $a\cdot b$ es divisor de cero.

$a\in A$ divisor de cero $\iff \exists c\in A\setminus\{0\}: a\cdot c=0$

$a\cdot b\neq 0$. Veamos que $a\cdot b$ es divisor de cero:
En efecto:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(a\cdot b)}_{\neq 0}\cdot \underbrace{c}_{\neq 0} &= a\cdot(b\cdot c) && /\ \cdot \text{ asocia}\\
&= a\cdot(c\cdot b) && /\ \text{conmuta}\\
&= (a\cdot c)\cdot b && /\ \text{asocia}\\
&= 0\cdot b && /\ a,c \text{ divisores de } 0.\\
&= 0 && /\ 0 \text{ absorbente.}
\end{aligned}
$$

Luego $a\cdot b$ es divisor de 0.

(b) $a \cdot b$ divisor de $0 \Rightarrow a$ div 0 o b div 0

$a \cdot b$ divisor de $0 \Leftrightarrow a \cdot b \neq 0 \wedge \exists c \in A \setminus \{0\}$:

$(a \cdot b) \cdot c = 0 \quad \vee \quad c \cdot (a \cdot b) = 0$

pdq: a div de 0 o b div de 0.

- Si a es div de 0, estamos listos
- Si no lo es:

$(a \cdot c) \cdot b = (a \cdot b) \cdot c = 0$

Sabemos que $a \neq 0$, pues si no, $a \cdot b = 0$ $\times$

Además, $c \neq 0 \Rightarrow a \cdot c \neq 0$ (de lo contrario, $a \cdot c = 0 \Rightarrow a$ div de 0 $\times$)

Finalmente, $b \neq 0$, pues si no $a \cdot b = 0$ $\times$

Luego, $a \cdot c \neq 0$, $b \neq 0$, y $(a \cdot c) \cdot b = 0$

$\Rightarrow b$ div. de cero $\blacksquare$