MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 11 - Grupos, Subgrupos y Anillos

18 de junio de 2021

P1. Sea $\mathcal{G} = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$, y sea $\star$ la ley de composición interna definida por

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab} \quad \forall a, b \in \mathcal{G}$$

Demuestre que $(\mathcal{G}, \star)$ es un grupo abeliano.

P2. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ y $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 : f(x) = ax + b\}$.

(a) Demuestre que $(\mathcal{A}, \circ)$ es subgrupo de $(\mathcal{F}, \circ)$, donde $\circ$ es la composición de funciones.

(b) Demuestre que $\mathcal{A} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$. *Indicación: Ocupe una operación* $*$ *en* $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ *conveniente.*

(c) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ no es isomorfo a $(\mathbb{Q}, +)$.

P3. Sea $(G, *)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Probar que el conjunto

$$H * K = \{h * k \mid h \in H,\ k \in K\}$$

es subgrupo de $(G, *)$.

P4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor del 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es divisor del 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor del 0, entonces al menos uno de ellos es divisor del 0.

Resumen

- **[Grupo]**: Sea $(G,*)$ una e.a., diremos que:
  - Es **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro y todo elemento posee inverso.
  - Es **grupo abeliano** si es grupo y $*$ es conmutativa.
- **[Propiedades grupos]**: Sea $(G,*)$ grupo, entonces:
  - I) $\forall a,b \in G, a * x_1 = b \Leftrightarrow x_1 = a^{-1} * b$
    $\forall a,b \in G, x_2 * a = b \Leftrightarrow x_1 = b * a^{-1}$
    Es decir, las ecuaciones tienen una única solución.
  - II) $\forall a \in G$ las funciones $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ son biyectivas.
  - III) El unico elemento idempotente es el neutro.
  - IV) Si (K,Δ) una e.a. y $f : G \to K$ morfismo, entonces $(f(G),\Delta)$ es grupo.
  - V) Si (K,Δ) una e.a., un morfismo $f : G \to K$ es monomorfismo (inyectivo) si y solo si $f^{-1}(\{e_K\}) = \{e_G\}$
- **[Grupos importantes]**:
  - Si $(G,*)$ es grupo (abeliano) y $A \neq \emptyset$, entonces $(G^A,*)$ es grupo (abeliano)
  - Si $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2)$ son grupos (abelianos), entonces $(G_1 \times G_2, \otimes)$ es grupo (abeliano).
- **[Subgrupo]**: Sea $(G,*)$ grupo y $\emptyset \neq H \subseteq G$. Diremos que H es subgrupo de G si $(H,*)$ es grupo.
- **[Propiedades subgrupos]**:
  1. Si $e \in G$ es el neutro de G y $e_H \in H$ es neutro de H entonces $e = e_H$.
  2. Además, sea $x \in H$. $x^{-1} \in G$ es el inverso de x en $(G,*)$, y $\overline{x}$ es el inverso de x en $(H,*)$. Entonces $x^{-1} = \overline{x}$.
- **[Caracterización Subgrupos]**: Sea $H \neq \emptyset$. Entonces:

  $(H,*)$ es subgrupo de $(G,*) \Leftrightarrow \forall x,y \in H,\ x*y^{-1} \in H$
- **[Subgrupo imagen]**: Sea $(G,*)$ grupo, (K,Δ) una estructura algebraica y $f : G \longrightarrow K$ un morfismo. Si H es subgrupo de $(G,*)$, entonces $f(H)$ es subgrupo de $(f(G),\Delta)$.
- **[Anillo]**: Una e.a. $(A,+,\cdot)$ se llamará anillo si:
  - $(A,+)$ es grupo abeliano.
  - $\cdot$ es asociativa y posee elemento neutro en $A \setminus \{0\}$.
  - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.

  En el caso de ser $\cdot$ conmutativo, $(A,+,\cdot)$ será anillo conmutativo.
- **[Morfismos de anillos]**: $f : A \to B$ Sera morfismo entre dos anillos $(A,+_A,\cdot_A)$ y $(B,+_B,\cdot_B)$ si:

$$f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$$
$$f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y)$$
$$f(1_A) = 1_B$$

- **[Algebra en anillos]**: Si $(A,+,\cdot)$ es anillo y $x,y \in A$:
  - $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
  - $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
  - $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
  - $-x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$
- **[Potencias y múltiplos]:** Sea $(A,+,\cdot)$ anillo. Para $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$ se definen recursivamente potencias y múltiplos de a, denotados a^n y $n \cdot a$, respectivamente.
  - $a^0 = 1$, y $a^{n+1} = a^n \cdot n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Si a posee inverso a^{-1}, entonces $a^{-n} = (a^{-1})^n$.
  - $0 \cdot a = 0, (n+1) \cdot a = n \cdot a + a, (-n) \cdot a = n \cdot (-a)\ \forall n \in \mathbb{N}$
- **[Propiedades conocidas en anillos]:** Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo.
  - $\forall k,l \in \mathbb{Z}, \forall a,b \in A, k(a+b) = ka + kb, (k+l)a = ka + la, (ka)(lb) = (kl)(ab)$
  - *[Suma geométrica]:* $\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} - 1 = (x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k$
  - *[Binomio de Newton]:* Cuando el anillo es conmutativo, $\forall x,y \in A, \forall n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
- **[Divisores de cero y dominio de integridad]**: Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Un elemento $a \neq 0$ es divisor de 0 si $\exists y \neq 0$ tal que $a \cdot y = 0$ o $y \cdot a = 0$.
  A un anillo conmutativo y sin divisores de 0 lo llamaremos dominio de integridad.
- **[Propiedad]**: Si $(A,+,\cdot)$ anillo, entonces:

  a es cancelable en $(A,\cdot) \Leftrightarrow a$ no es divisor de cero