MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 10 - Cardinalidad y Estructuras Algebraicas

11 de junio de 2021

P1. ***[Terminemos con cardinales]***

a) Sea B un conjunto numerable y $\preceq$ una relación de orden total definida en B. Pruebe que dado $a \in B$, uno de los siguientes conjuntos es numerable:

- $B_1 = \{b \in B : b \preceq a\}$
- $B_2 = \{b \in B : a \preceq b\}$

b) Sean A, B conjuntos finitos, con $|A| = 13, |B| = 11$. Supongamos, además, que $|A \Delta B| = 8$. Calcule $|B \setminus A|$.

P2. ***[Asociando ando]*** Consideremos $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa en A. Sea $a \in A$ fijo, se define:

$$B = \{x \in A |\ a * x = x * a\}$$

Demuestre que

(a) $(\forall x, y \in B)\ x * y \in B$.

(b) Si $e \in A$ es neutro, entonces $e \in B$.

(c) Si $x \in B$ tiene inverso x^{-1}, entonces $x^{-1} \in B$

P3. ***[Yo y los reales]*** Se define en $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

(a) Estudiar la conmutatividad y asociatividad de $*$.

(b) Determine el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.

(c) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

(d) Determine los elementos idempotentes en $(\mathbb{R}^2, *)$.

P4. ***[Morfismos]*** Sea f un homomorfismo, no necesariamente epiyectivo, de $(A, *)$ en (B, Δ), con neutros e_A y e_B, respectivamente. Demuestre:

(a) Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$

(b) $a \in A$ tiene inverso b para $(A, *)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B, Δ).

(c) Supongamos que todos los elementos son invertibles. Un homomofismo $f : A \longrightarrow B$ de $(A, *)$ en (B, Δ) es un monomorfismo, es decir, es inyectivo, si y solo si $f^{-1}(\{e_B\}) = \{e_A\}$.

Resumen

- **[Ley de composición interna]**: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$\begin{array}{rccc} *: & A \times A & \rightarrow & A \\ & (x,y) & \rightarrow & x * y \end{array}$$

- **[Estructura algebrica]**: Si $*$ es l.c.i. en A, $(A,*)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A,*,\Delta)$
- **[Definiciones varias]**: Sea $(A,*)$ estructura algebrica:
  - I) $*$ es **asociativa** si:
  $$\forall x,y,z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$$
  - II) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:
  $$\forall x \in A, e*x = x*e = x$$
  - III) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:
  $$x*y = y*x = e$$
  - IV) $*$ es **conmutativa** si:
  $$\forall x,y \in A, x*y = y*x$$
  - V) $a \in A$ es **absorbente** si:
  $$\forall x \in A, x*a = a*x = a$$
  - VI) $a \in A$ es **idempotente** si
  $$a*a = a$$
  - VII) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y,z \in A$:
  $$a*y = a*z \Rightarrow y = z$$
  $$y*a = z*a \Rightarrow y = z$$
  - VIII) Dado $(A,*,\Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x,y,z \in A$:
  $$x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z)$$
  $$(y*z)\Delta x = (y\Delta x)*(z\Delta x)$$
- **[Cancelabilidad]**: Sea $(A,*)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ para $x \in A$ son inyectivas
- **[Unicidad del neutro]**: Una e.a. $(A,*)$ posee a lo más un neutro.
- **[Unicidad del inverso]**: Si la e.a. $(A,*)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.
- **[Propiedades varias]**: Si $(A,*)$ es e.a. asociativa con neutro e, entonces también cumple:
  - I) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.
  - II) Si $x,y \in A$ poseen inversos, entonces $x*y$ también y se tiene $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$
  - III) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.
- **[Homomorfismos]**: Una función $f: A \rightarrow B$ es un **morfismo** entre las estructuras algebraicas $(A,*)$ y (B,Δ) si:
  $$\forall x,y \in A,\ f(x*y) = f(x)\Delta f(y)$$
  Si f es biyectiva se dirá **isomorfismo**.
- **[Props epimorfismos]**: Si $f: A \rightarrow B$ epimorfismo entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces se tienen las siguientes propiedades:
  - I) Si $(A,*)$ es asociativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.
  - II) Si $(A,*)$ es conmutativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.
  - III) Si e es neutro para $(A,*)$, entonces $f(e)$ lo es para (B,Δ).
  - IV) Si a tiene inverso b para $(A,*)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B,Δ).
- **[Estructuras isomorfas]**: Dos estructuras $(A,*)$ y (B,Δ) son isomorfas, denotado $(A,*) \cong (B,\Delta)$, si existe una función $f: A \rightarrow B$ isomorfismo.
  Obs.: $\cong$ es una relación de equivalencia.