MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 8 - Sumatorias y Conjuntos Finitos

28 de mayo de 2021

P1. Calcule:

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!$

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i^2$

P2. Sean $i,k,n\in\mathbb{N}$ tales que $0\leq k\leq i\leq n$. Demuestre que:

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}=\binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

y úselo para demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}=3^n$$

P3. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}$$

P4. (a) Sean A,B y C conjuntos finitos. Calcule la cardinalidad del siguiente conjunto, en términos del cardinal de A, B y C y/o sus intersecciones:

$$|(A\cup C)\times(B\cup C)|$$

(b) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto finito A de modo que para todo $X,Y\in\mathcal{C},\ |X|=|Y|$. Demuestre que $|\mathcal{C}|$ divide a $|A|$.

Resumen

- **[Índices disjuntos]**: Sea $(a_k)_{k\in[1..n]}$ una secuencia de números reales y sean $I, J \subseteq [1..n]$ disjuntos. Entonces:

$$\sum_{k\in I\cup J} a_k = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in J} a_k$$

Obs.:$[1..n] = \{1, ..., n\}$

- **[Intercambio de sumas dobles]**: Para una sumatoria doble $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}$ cuyos **límites inferiores y superiores no dependen de los índices**, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}$$

- **[Coeficiente binomial]** : Para dos enteros n y k, $0 \leq k \leq n$, se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Donde si $k < 0$ o $k > n$, entonces $\binom{n}{k} = 0$.

- **Observación:** Para un conjunto A de n elementos, la cantidad de subconjuntos $B \subseteq A$ de tamaño k está dada por $\binom{n}{k}$
- **[Propiedades Relevantes]**:

a)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b) *Identidad de Pascal:*
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

- **[Binomio de Newton]**: Sean $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- **[Conjunto finito]**: Un conjunto A se dice finito si posee finitos elementos, es decir si $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que existe una función $f : A \to [1..n]$.
- **[Cardinal finito]**: Sea A un conjunto finito. Definimos el cardinal de A - denotado por $|A|$- como el único $n \in \mathbb{N}$ para el que existe una enumeración $a_1, ..., a_n$ de A.
- **[Propiedades varias]**:

1. $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$
2. $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ biyectiva.
3. Si B es finito y $A \subseteq B$, entonces A es finito y $|A| \leq |B|$
4. Si A, B finitos disjuntos entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$
5. Si $B \subseteq A$ con A finito, entonces $|A \setminus B| = |A| - |B|$. En particular si $|A| = |B|$ entonces $A = B$
6. Si A, B finitos, entonces $|A\cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$.

- **[Equivalencia para funciones]**: Si A, B finitos con $|A| = |B|$ y sea $f : A \longrightarrow B$ función. Son equivalentes:
  - f es inyectiva.
  - f es epiyectiva.
  - f es biyectiva.
- **[Propiedad importante]**: Sean A, B conjuntos con B finito. Se tiene:

1. A es finito y $|A| \leq |B|$ si y solo si existe $f : A \to B$ inyectiva.
2. A es finito y $|A| = |B|$ si y solo si existe $f : A \to B$ biyectiva.

- **[Cardinal producto]**: Sean A, B conjuntos finitos, se tiene que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- **[Conjunto de funciones]**: Sean A, B conjuntos, se define:

$$B^A := \{f : A \to B \mid f \text{ es función}\}$$

Además, se cumple que $|B|^{|A|}$