# PAUTA AUX #7

## P1)

(a) **Refleja:**

Sea $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$x - x = 0 = 2 \cdot 0$ y $0 \in \mathbb{Z}$

Entonces $x \equiv_2 x$ //

**Simétrica:**

Sea $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \equiv_2 y$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $x - y = 2k$

$\Rightarrow y - x = 2 \cdot (-k)$

Sea $\tilde{k} = -k \Rightarrow \tilde{k} \in \mathbb{Z}$

Luego $y - x = 2 \cdot \tilde{k}$ con $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y \equiv_2 x$ //

Transitividad:

Sea $x, y, z \in \mathbb{R}$ tq $x \equiv_2 y \wedge y \equiv_2 z$

$\Rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z}$ tq $x - y = 2k \wedge y - z = 2k'$

$\Rightarrow x - \cancel{y} + \cancel{y} - z = 2k + 2k'$

$\Rightarrow x - z = 2(k + k')$

Definimos $\tilde{k} = k + k'$

como $k, k' \in \mathbb{Z} \Rightarrow \tilde{k} \in \mathbb{Z}$

Luego, $x - z = 2 \cdot \tilde{k}$ con $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \equiv_2 z$

$\blacksquare$

(b)

$[0]_{\equiv_2} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \equiv_2 0 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - 0 = 2k \}$

$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ 2k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$=$ conjunto de n°s pares.

(c)

$\supseteq$) Se tiene por definición del conjunto de la derecha (son clases de equivalencia $\Rightarrow$ pertenecen trivialmente al conjunto cociente)

$\subseteq$)

Sea $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que encontrar un $\tilde{x} \in [0,2)$ tq $x \equiv_2 \tilde{x}$

Caso 1: $\lfloor x \rfloor$ es par

Tomamos $\tilde{x} = \underbrace{x - \lfloor x \rfloor}_{\text{parte decimal}}$

si $x = 23{,}456907$

$\Rightarrow x - \lfloor x \rfloor = 0{,}456907$

y se tiene que $\tilde{x} \in [0,1) \subseteq [0,2)$

Además,

$$x - \tilde{x} = x - (x - \lfloor x \rfloor) = \cancel{x} - \cancel{x} + \lfloor x \rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor = 2k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

pues $\lfloor x \rfloor$ es par

Entonces $x \equiv_2 \tilde{x}$

Caso 2: $\lfloor x \rfloor$ es impar

Tomamos $\tilde{x} = x - \lfloor x \rfloor + 1$

Primero, se tiene que

$x - \lfloor x \rfloor \in [0,1)$

$\Rightarrow \quad x - \lfloor x \rfloor + 1 \in [1,2) \subseteq [0,2)$

$\Rightarrow \quad \tilde{x} \in [0,2)$

y además,

$$x - \tilde{x} = x - (x - \lfloor x \rfloor + 1)$$

$$= \cancel{x} - \cancel{x} + \lfloor x \rfloor - 1$$

$$= \lfloor x \rfloor - 1 = 2k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

pues $\lfloor x \rfloor$ es impar //

Entonces, al tomar una clase de equivalencia $[x]_{\equiv_2}$ con $x \in \mathbb{R}$ del conjunto cociente, obtenemos un $\tilde{x} \in [0,2)$ tq

$x \equiv_2 \tilde{x} \implies [x]_{\equiv_2} = [\tilde{x}]_{\equiv_2}$

Luego

$[x]_{\equiv_2} \in \{ [x]_{\equiv_2} \mid x \in [0,2) \}$ ■

P2

(a) Refleja:

Sea $X \in P(E)$. Entonces,

$A \setminus X = A \setminus X \implies X R X$ //

Simétrica:

Sea $X, Y \in P(E)$ tq $X R Y$

$\implies A \setminus X = A \setminus Y$

$\implies A \setminus Y = A \setminus X$

$\implies Y R X$

Transitiva:

Sea $X, Y, Z \in P(E)$ tq

$X R Y \wedge Y R Z$

Entonces,

$$A \setminus X = A \setminus Y \ \wedge \ A \setminus Y = A \setminus Z$$

$$\Rightarrow \ A \setminus X = A \setminus Z \quad \blacksquare$$

(b)

$\boxed{\supseteq}$ Mismo argumento P1 (c)

$\boxed{\subseteq}$

Sea $X \in \mathcal{P}(E)$. Podemos tomar

$$\tilde{X} = A \cap X$$

y se tiene que $\tilde{X} \subseteq A \Rightarrow \tilde{X} \in \mathcal{P}(A)$

y además,

$$\begin{aligned}
A \setminus \tilde{X} &= A \cap \tilde{X}^c \\
&= A \cap (A \cap X)^c \\
&= A \cap (A^c \cup X^c) \\
&= \underbrace{(A \cap A^c)}_{\emptyset} \cup (A \cap X^c) \\
&= A \cap X^c = A \setminus X
\end{aligned}$$

Entonces, $X \, R \, \tilde{X}$.

Luego, si tomamos una clase de equivalencia $[X]_R$ con $X \in P(E)$ obtenemos un $\tilde{X} \in P(A)$ tq

$$X \, R \, \tilde{X} \Rightarrow [X]_R = [\tilde{X}]_R$$

Entonces,

$$[X]_R \in \{ [X]_R \mid X \in P(A) \} \qquad \blacksquare$$

(c) Sea $X, Y \in P(A)$ tq $X^c \neq Y^c$

$\Rightarrow X \subseteq A \wedge Y \subseteq A$

Como $X^c \neq Y^c \Rightarrow X \neq Y$

Luego,

$$A \setminus X^c = A \cap (X^c)^c$$
$$= A \cap X = X \quad \text{pues } X \subseteq A$$

Asimismo

$$A \setminus Y^c = Y$$

$\Rightarrow A \setminus X^c \neq A \setminus Y^c$

$$\Rightarrow X^c \not R \; Y^c$$

$$\Rightarrow [X^c]_R \neq [Y^c]_R \quad \blacksquare$$

P3)

$$\sum_{j=3}^{n-1} (j+1)(j+2)$$

$$= \sum_{j=3}^{n-1} j^2 + 3j + 2$$

$$= \underbrace{\sum_{j=3}^{n-1} j^2}_{(i)} + 3 \underbrace{\sum_{j=3}^{n-1} j}_{(ii)} + \underbrace{\sum_{j=3}^{n-1} 2}_{(iii)}$$

$$(i) = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 - 1 - 4$$

$$= \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} - 5$$

$$(ii) = \sum_{j=1}^{n-1} j - 1 - 2$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} - 3$$

$$(iii) = (n-1-3+1)\cdot 2$$

Entonces la suma es

$$(i) + 3(ii) + (iii) \quad //$$

(b)
$$\sum_{k=3}^{n} b_k - b_{k-3}$$

$$= \sum_{k=3}^{n} b_k \underbrace{- b_{k-1} + b_{k-1} - b_{k-2} + b_{k-2}}^{\text{sumar cero}} - b_{k-3}$$

$$= \sum_{k=3}^{n} b_k + b_{k-1} + b_{k-2} - (b_{k-1} + b_{k-2} + b_{k-3})$$

telescópica

$$= b_n + b_{n-1} + b_{n-2} - (b_2 + b_1 + b_0)$$

(c)

$$\sum_{k=l}^{n} \left(\frac{2}{l}\right)^{k}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{l}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{l} - 1}$$

} se indetermina si $l = 2$

Entonces el caso de arriba es si $l \neq 2$ //

si $l = 2$:

$$\sum_{k=l}^{n} \left(\frac{2}{l}\right)^{k} = \sum_{k=2}^{n} 1^{k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} 1$$

$$= n - 2 + 1$$

//

(d)

Fracciones Parciales

$$\frac{i}{(i+1)(i+2)} = \frac{A}{i+1} + \frac{B}{i+2}$$

$$\Rightarrow \quad i = A(i+2) + B(i+1)$$

$$\Rightarrow \quad i = i(A+B) + 2A + B$$

$$\Rightarrow \quad A+B = 1 \wedge 2A+B = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = -1 \wedge B = 2$$

Luego

$$\frac{i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2}{i+2} - \frac{1}{i+1}$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} \frac{i}{(i+1)(i+2)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2^{i+1} \left[ \frac{2}{i+2} - \frac{1}{i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i+2}}{i+2} - \frac{2^{i+1}}{i+1}$$

$$= \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^2}{1+1}$$

$$= \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2$$

(e)

$$\sum_{i=1}^{n} i\,2^i$$

$$= \boxed{\begin{matrix} 2 \\ +\,2^2 \\ +\,2^3 \\ \vdots \\ +\,2^n \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 2^2 \\ 2^3 \\ \vdots \\ 2^n \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 2^3 \\ \vdots \\ 2^n \end{matrix}} + \dots + \boxed{2^n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{n+1} - 2^i}{2-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i$$

$$= 2^{n+1}(n-1+1) - \frac{2^{n+1} - 2^1}{2-1}$$

$$= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

$$= (n-1)2^{n+1} + 2$$