

PAUTA AUX #8

P11

(a) Sea $A, B \subseteq E$. Sea $y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$

$$\Rightarrow \exists x \in A \text{ tq } f(x) = y \wedge \forall x \in B, f(x) \neq y$$

Luego, tomamos $\tilde{x}$ como el elemento que cumple

$\tilde{x} \in A \wedge f(\tilde{x}) = y$. Notamos que $\tilde{x} \notin B$, pues si suponemos

$$\text{que } \tilde{x} \in B \Rightarrow \exists x \in B \text{ tq } f(x) = y \rightarrow \text{---}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} \in A \setminus B \text{ y } f(\tilde{x}) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(A \setminus B) \rightarrow f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad \blacksquare$$

$$(b) \Rightarrow \underline{\forall A, B \subseteq E \quad f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)}$$

Sea x_1, x_2 tq $f(x_1) = f(x_2)$. Como $\{x_1\}, \{x_2\} \subseteq E$

por hipótesis $\Rightarrow f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) = f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$

$$\Rightarrow \{f(x_1)\} \setminus \{f(x_2)\} = f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$$

Como $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \emptyset = f(\{x_1\} \setminus \{x_2\}) \text{ y la única manera que}$$

conj. imagen sea $\emptyset$ es que $\{x_1\} \setminus \{x_2\} = \emptyset \Rightarrow \{x_1\} \subseteq \{x_2\}$

$\Rightarrow$ todo elemento de $\{x_1\}$ es elemento de $\{x_2\}$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 //$$

$\Leftarrow$ | f inyectiva | Demostraremos la igualdad por doble inclusión

$\subseteq$ | listo por parte (a)

$\supseteq$ | Sea $y \in f(A \setminus B) \Rightarrow \exists x \in A \setminus B$ tq $f(x) = y$ ⁽ⁱ⁾

en particular, $\exists x \in A$ tq $f(x) = y \Rightarrow y \in f(A)$.

Supongamos, por contradicción, que $y \notin f(B)$

$\Rightarrow \exists \tilde{x} \in B$ tq $f(\tilde{x}) = y$ ⁽ⁱⁱ⁾

luego, sea x el que cumple (i) y $\tilde{x}$ el que cumple (ii)

$x \neq \tilde{x}$ pues $x \notin B$ y $\tilde{x} \in B$, pero $f(x) = f(\tilde{x})$ lo que

contradice la inyectividad $\rightarrow \leftarrow$

$\Rightarrow y \notin f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ $\square$

(c) Sea $Y \subseteq F$. Sea $y \in f(f^{-1}(Y)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(Y)$ tq $f(x) = y$

luego, sea $\tilde{x}$ el que cumple $\tilde{x} \in f^{-1}(Y)$ y $f(\tilde{x}) = y$.

Como $\tilde{x} \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(\tilde{x}) \in Y \Rightarrow y \in Y$ $\square$

$$(d) \Rightarrow \underline{\forall Y \subseteq F \quad Y = f(f^{-1}(Y))}$$

Sea $y \in F$. Como $F \subseteq F \Rightarrow$ por hipótesis, $F = f(f^{-1}(F))$

$$\Rightarrow y \in f(f^{-1}(F)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(F) \text{ tq } f(x) = y$$

$$\Rightarrow \exists x \in E \text{ tq } f(x) = y \quad \left| \begin{array}{l} \text{pues } E = f^{-1}(F) \\ \text{siempre!!} \end{array} \right|$$

$\Rightarrow f$ sobreyectiva //

$\Leftarrow$ Vamos a demostrar la igualdad

$\supseteq$ lista por parte (c)

$\subseteq$ Sea $y \in Y$. Como f es sobreyectiva $\Rightarrow \exists x \in E$ tq $f(x) = y$. Como $y \in Y \Rightarrow f(x) \in Y \Rightarrow x \in f^{-1}(Y)$

$$\Rightarrow \exists x \in f^{-1}(Y) \text{ tq } f(x) = y \Rightarrow y \in f(f^{-1}(Y)) \quad \blacksquare$$

(e) Sea $Y \subseteq F$. Sea

$$x \in f^{-1}(Y^c)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in Y^c$$

$$\Leftrightarrow f(x) \notin Y$$

$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(Y)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y)^c \quad \blacksquare$$

P2] $\underbrace{\{(E, \emptyset)\}}_A \cup \underbrace{\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) : X \subseteq Y\}}_B$

(a) $\supseteq$ Sea $(P, Q) \in A \cup B$

Caso 1: $(P, Q) \in A \Rightarrow (P, Q) \in \{(E, \emptyset)\}$

$\Rightarrow (P, Q) = (E, \emptyset)$

luego $F((P, Q)) = P \setminus Q = E \setminus \emptyset = E$

$\Rightarrow F((P, Q)) \in \{E, \emptyset\} \Rightarrow (P, Q) \in F^{-1}(\{E, \emptyset\}) //$

Caso 2: $(P, Q) \in B \Rightarrow P \subseteq Q$, luego

$F((P, Q)) = P \setminus Q = \emptyset$ pues $P \subseteq Q$

$\Rightarrow F((P, Q)) \in \{E, \emptyset\} \Rightarrow (P, Q) \in F^{-1}(\{E, \emptyset\}) //$

$\subseteq$ Sea $(P, Q) \in F^{-1}(\{E, \emptyset\}) \Rightarrow F((P, Q)) \in \{E, \emptyset\}$

Caso 1: $F((P, Q)) = E$

$\Rightarrow F((P, Q)) = P \setminus Q = E \Rightarrow P \cap Q^c = E$ como $P \subseteq E$ y $Q \subseteq E$

$\Rightarrow P = E \wedge Q^c = E \Rightarrow (P, Q) = (E, \emptyset) \Rightarrow (P, Q) \in A$

$\Rightarrow (P, Q) \in A \cup B$

Caso 2: $F((P, Q)) = \emptyset \Rightarrow P \setminus Q = \emptyset \Rightarrow P \cap Q^c = \emptyset$

$\Rightarrow P \subseteq Q$

$\Rightarrow (P, Q) \in B \Rightarrow (P, Q) \in A \cup B$ ■

$$\begin{aligned}
 (b) \quad F(D) &= \{ Y \in P(E) \mid \exists (P, Q) \in D \mid F((P, Q)) = Y \} \\
 &= \{ F((P, Q)) : (P, Q) \in D \} \\
 &= \{ F((P, Q)) : (P, Q) = (X, X) \text{ con } X \in P(E) \} \\
 &= \{ F((X, X)) : X \in P(E) \} \\
 &= \{ X \setminus X : X \in P(E) \} \\
 &= \{ \emptyset \} \quad (\text{ojo, es distinto de } \emptyset; \text{ es } \{\emptyset\})
 \end{aligned}$$

(c) Sea $Y \in P(E)$. Basta tomar $(Y, \emptyset)$ el cual $\in P(E) \times P(E)$ y se tiene $F((Y, \emptyset)) = Y \setminus \emptyset = Y \Rightarrow F$ sobreyectiva.

Por otro lado, $(\emptyset, E) \neq (\emptyset, \emptyset)$, pero

$$F((\emptyset, E)) = F((\emptyset, \emptyset)) = \emptyset \Rightarrow \text{no es inyectiva}$$

(a menos que $E = \emptyset$, que suponemos falso)

P3

(a) Refleja, pues $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in S$

Simétrica, pues ~~$(x, y) \in S \Leftrightarrow (y, x) \in S$~~ $\Leftrightarrow \forall \forall x, y \in A$

No es antisimétrica, pues $(1, 2) \in S \wedge (2, 1) \in S$ pero $1 \neq 2$.

Transitiva, pues $(x, y) \in S \Leftrightarrow \forall \forall x, y \in A$

FORO si hay dudas de esto!!

P3]

(a) Reflexa:

Sea $X \in \mathcal{P}(E)$, claramente

$$X \cap K \subseteq X$$

$$\Rightarrow X R_K X //$$

Transitiva:

Sea $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ tq $X R_K Y \wedge Y R_K Z$

$$\Rightarrow X \cap K \subseteq Y \wedge Y \cap K \subseteq Z$$

Entonces,

$$X \cap K \subseteq Y \quad / \quad \cap K$$

$$X \cap K \cap K \subseteq Y \cap K \subseteq Z$$

$$\Rightarrow X \cap K \subseteq Z$$

$$\Rightarrow X R_K Z \quad \square$$

(b-)

$\Rightarrow$

Sabemos que, como $K \subseteq E$

$$K \cap K \subseteq E \Rightarrow K R_K E$$

y como $E \cap K = K$

$$\Rightarrow E \cap K \subseteq K \Rightarrow E R_K K$$

Luego, se tiene que

$$K R_K E \wedge E R_K K$$

$\Rightarrow K = E$ pues R_K es antisimétrica,
ya que es de orden //

$\Leftarrow$ Solo falta probar la antisimetría.

Sea $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tq $A R_K B \wedge B R_K A$

$$\Rightarrow A \cap K \subseteq B \wedge B \cap K \subseteq A$$

$$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \wedge B \cap E \subseteq A$$

$$\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Rightarrow A = B$$



P41

Sea $R_1, R_2 \in \mathcal{P}(A \times B)$ tq

$$H(R_1) = H(R_2)$$

$$\Rightarrow T_{R_1} = T_{R_2}$$

Hay que demostrar que $R_1 = R_2$

$\subseteq$

$$\text{Sea } (\bar{x}, \bar{y}) \in R_1 \Leftrightarrow \bar{x} R_1 \bar{y}$$

$$\Rightarrow T_{R_1}(\bar{x}) = T_{R_2}(\bar{x})$$

$$\Rightarrow R_1(\{\bar{x}\}) = R_2(\{\bar{x}\})$$

$$\Rightarrow \{y \in B : (\bar{x}, y) \in R_1\} = \{y \in B : (\bar{x}, y) \in R_2\}$$

Sabemos que $\bar{x} R_1 \bar{y}$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \{y \in B : (\bar{x}, y) \in R_1\}$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in \{y \in B : (\bar{x}, y) \in R_2\}$$

$$\Rightarrow \bar{x} R_2 \bar{y} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in R_2$$

2) Análogo a la primera inclusión
 $\Rightarrow R_1 = R_2$ $\square$