P1. (a) Sea $a \in \mathbb{N}$ y ℓ_n definida por la recurrencia $\ell_0 = 2$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_{n+1} = a\ell_n + (1-a)$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, \ell_n = a^n + 1$.

(b) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ con $a \geq b$ y f_n definida por la recurrencia $f_0 = 2$, $f_1 = 2a$ y $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq a^n + b^n$

(c) Sea s_n definida por la recurrencia $s_0 = 0$ y $s_{n+1} = s_n + \ell_n$, para $n \geq 0$. Demostrar que si $a \neq 1$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = (a^n - 1)/(a-1) + n$. ¿Cuánto vale s_n cuando $a = 1$?.

$a \in \mathbb{N}$ $\quad b \in \mathbb{N}$ $\quad a \geq b \; / \cdot b^n$

$\ell_0 = 2$ $\quad b \geq 0$ $\quad ab^n \geq b \cdot b^n = b^{n+1}$

$\ell_{n+1} = a\ell_n + (1-a)$ $\quad b^n \geq 0$

pdg $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = a^n + 1$

C.B | $n = 0$. $\ell_0 = 2$,

$a^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

$\ell_0 = a^0 + 1$ ✓

HI | Para $k \in \mathbb{N}$, $\ell_k = a^k + 1$ (H.I)

Paso inductivo | p.d.g. $\ell_{k+1} = a^{k+1} + 1$.

$$\ell_{k+1} = a\ell_k + (1-a) \quad /(\text{H.I})$$
$$= a(a^k + 1) + (1-a)$$
$$= a^{k+1} + \cancel{a} + 1 - \cancel{a} = a^{k+1} + 1$$
$$\therefore \ell_{k+1} = a^{k+1} + 1$$

$\therefore$ por inducción, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_n = a^n + 1$

(b) Por inducción, demostrar que $f_n \geq a^n + b^n$. $\forall n \in \mathbb{N}$

$a, b \in \mathbb{N}$
$a \geq b$
$f_0 = 2$
$f_1 = 2a$
$f_{n+2} = a f_{n+1} + b f_n$

C.B | $n = 0$

$f_0 = 2$.

$a^0 + b^0 = 1 + 1 = 2$

$\therefore f_0 \geq a^0 + b^0$ ✓

H.I.F. | Para $k \in \mathbb{N}$, $\forall n \leq k$, $f_n \geq a^n + b^n$

Paso inductivo | pdq. $f_{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} &= a f_n + b f_{n-1} && / \text{H.I: } f_n \geq a^n + b^n \\
&\geq a(a^n + b^n) + b f_{n-1} && / \text{H.I.F: } f_{n-1} \geq a^{n-1} + b^{n-1} \\
&\geq a^{n+1} + ab^n + b(a^{n-1} + b^{n-1}) && a \geq b \quad / \cdot b^n \geq 0 \\
&= a^{n+1} + ab^n + a^{n-1}b + b^n && ab^n \geq b^{n+1} \\
&\geq a^{n+1} + b^{n+1} + a^{n-1}b + b^n \\
&\geq a^{n+1} + b^{n+1}
\end{aligned}
$$

$a, b \in \mathbb{N}$

$a \geq 0$, $b \geq 0$

$\Rightarrow a^{n-1} \cdot b \geq 0$

$b^n \geq 0$

$\therefore f_{n+1} \geq a^{n+1} + b^{n+1}$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}, f_n \geq a^n + b^n$ $\boxed{M}$

(c) $a \neq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \; S_n = \left(\frac{a^n - 1}{a-1}\right) + n$

Por inducción sobre n.

C.B| $n = 0$

$S_0 = 0$

$\frac{a^0 - 1}{a-1} + 0 = \frac{1-1}{a-1} + 0 = 0.$

$\therefore S_0 = \frac{a^0 - 1}{a-1} + 0$ ✓

H.I| Para $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \frac{a^k - 1}{a-1} + k.$

Paso inductivo| p.d.q.: $S_{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1}{a-1} + (k+1)$

En efecto.

$S_{k+1} = S_k + l_k$

H.I; $S_k = \frac{a^k - 1}{a-1} + k$

Parte (a)

$\forall k \in \mathbb{N}, \; l_k = a^k + 1$

$= \frac{a^k - 1}{a-1} + k + a^k + 1$

$$= \frac{a^k - 1}{a-1} + k + a^k + 1$$

$$= \frac{a^k - 1 + a^k(a-1)}{(a-1)} + k + 1$$

$$= \frac{\cancel{a^k} - 1 + a^{k+1} - \cancel{a^k}}{(a-1)} + (k+1)$$

$$= \frac{a^{k+1} - 1}{a-1} + (k+1) \quad \boxed{\text{m}}$$

$$a \neq 1 \Rightarrow S_n = \frac{a^n - 1}{a-1} + n \quad \boxed{\text{m}}.$$

¿ $a = 1$? $\quad l_n = a^n + 1 \;/\; a = 1$

$$= 1^n + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\; l_n = 2.$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = S_n + l_n = S_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{n+1} - S_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$S_{n+1} - S_n = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left\{\begin{array}{l} S_1 - S_0 = 2 \\ S_2 - S_1 = 2 \\ \vdots \\ S_{n+1} - S_n = 2 \end{array}\right. \quad (+)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} S_{i+1} - S_i = \sum_{i=0}^{n} 2.$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} - \cancel{S_0}^{=0} = 2(n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{n+1} = 2(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n+1 = m$$

$$\Rightarrow S_m = 2m \quad \forall m \geq 1$$

$$S_0 = 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{S_m = 2m \quad \forall m \in \mathbb{N}} \quad \square$$

P_3 $\mathcal{F} \subseteq P(E)$, $E \in \mathcal{F}$

Ejemplo:

$E = \{0, 1\}$

$P(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \underbrace{\{0,1\}}_{E}\}$

$\mathcal{F} = \{\{0\}, \underbrace{\{0,1\}}_{E}\}$ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, E\}$

p.d.g:

$(\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \setminus B \in \mathcal{F}) \iff (\forall A, B \in \mathcal{F},\ \underbrace{A \cap B \in \mathcal{F}}_{1} \wedge \underbrace{B^c \in \mathcal{F}}_{2})$

$\Leftarrow$ p.d.g. $\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \setminus B \in \mathcal{F}$.

$\hookrightarrow A \cap B^c$

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ arb.

Como $B \in \mathcal{F} \overset{\text{HIP } 2}{\Rightarrow} B^c \in \mathcal{F}$

Como $A, B^c \in \mathcal{F} \overset{\text{HIP } 1}{\Rightarrow} A \cap B^c \in \mathcal{F}$

$\iff A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Como $A, B \in \mathcal{F}$ eran arb, $\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \setminus B \in \mathcal{F}$.

$\Rightarrow$ p.d.q. $\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B \in \mathcal{F} \wedge B^c \in \mathcal{F}$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad (1) \qquad\qquad\quad (2)$

HIP:
$\forall A, B \in \mathcal{F},$
$A \setminus B \in \mathcal{F}$

Primero probemos (2):

p.d.q. $\forall B \in \mathcal{F},\ B^c \in \mathcal{F}$.

$A \cap B^c \in \mathcal{F}$

Sea $B \in \mathcal{F}$ arb. Como $E \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F}$

$\overset{HIP}{\Rightarrow} E \setminus B \in \mathcal{F}$

$\Leftrightarrow B^c \in \mathcal{F}$ $\blacksquare$

Ahora probemos (1): $\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B \in \mathcal{F}$.

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ arb. como $B \in \mathcal{F} \overset{(2)}{\Rightarrow} B^c \in \mathcal{F}$

y como $A, B^c \in \mathcal{F} \overset{HIP}{\Rightarrow} A \setminus B^c \in \mathcal{F}$

$\Leftrightarrow A \cap (B^c)^c \in \mathcal{F}$

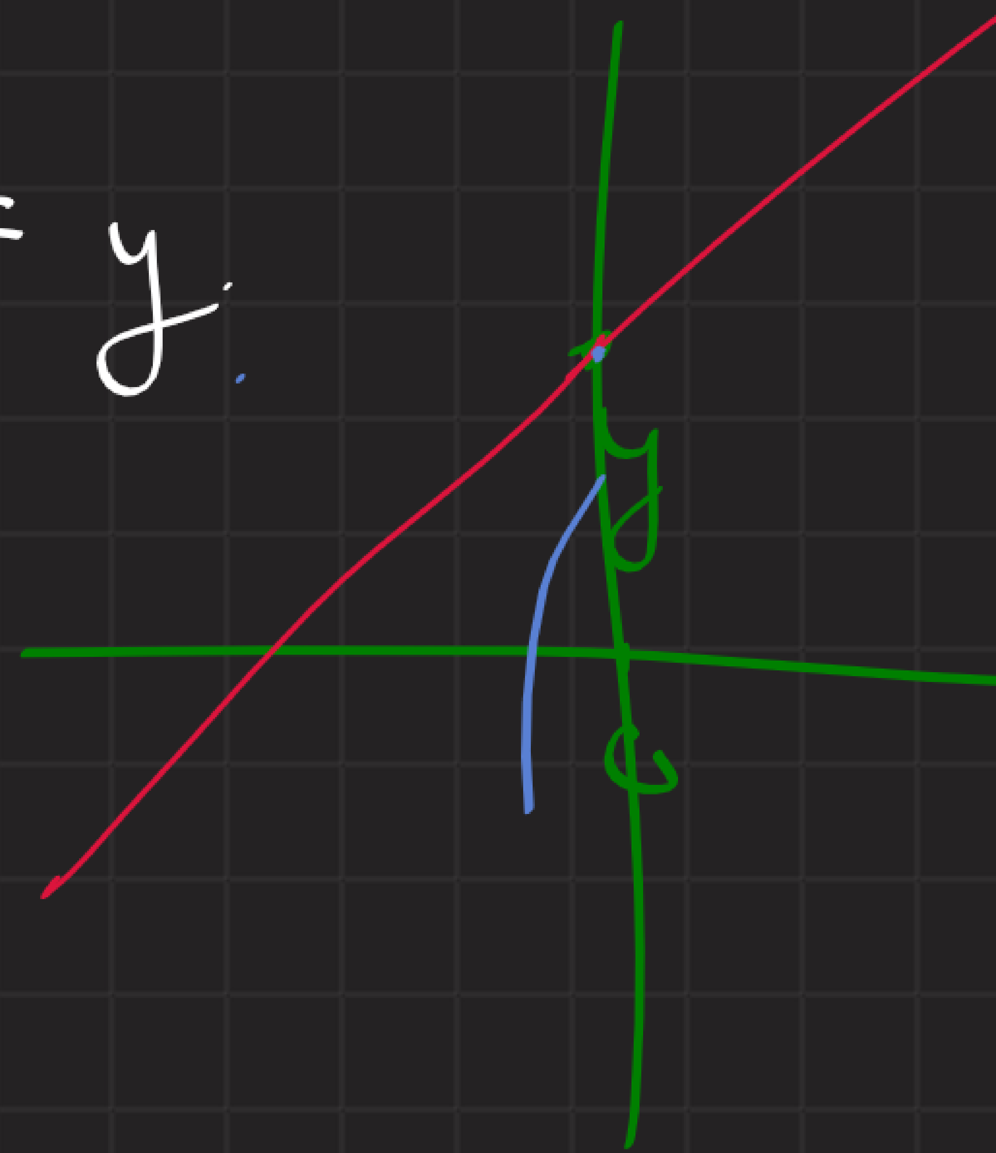
$\Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ $\blacksquare$.

P3 | pdq. ψ es EPI

$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists f \in \mathcal{F} : \psi(f) = y$

Sea $y \in \mathbb{R}$ a/b. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\psi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ $\qquad x \mapsto f(x) = y.$



Vemos que $f(0) = y$

$\Rightarrow \psi(f) = y.$

Luego $\exists f \in \mathcal{F}, \psi(f) = y$

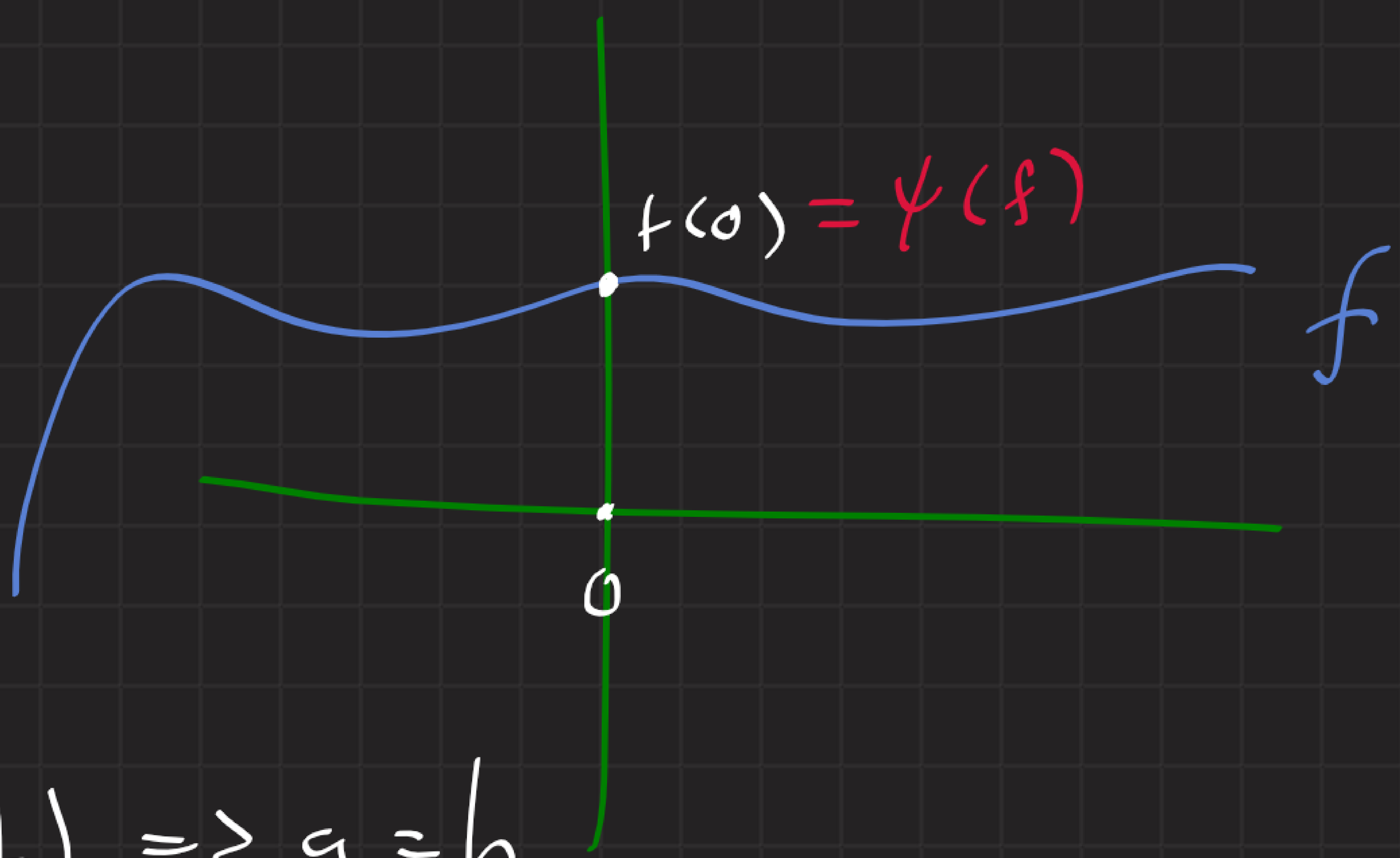
y como $y \in \mathbb{R}$ ab,

$\forall y \in \mathbb{R} \; \exists f \in \mathcal{F}, \psi(f) = y$

$\Leftrightarrow \psi$ es EPI

ψ no INY.

$\psi(f) = f(0)$



$f : A \to B$

- $\forall a, b \in A, \; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$
- $\forall a, b \in A \quad a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

ψ no INY

$\iff \sim \left(\forall f, g \in \mathcal{F},\ f \neq g \Rightarrow \psi(f) \neq \psi(g) \right)$

$\iff \exists f, g \in \mathcal{F},\ f \neq g \wedge \psi(f) = \psi(g)$

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \alpha \longrightarrow f(0) = \alpha$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x + \alpha \longrightarrow g(0) = \alpha$

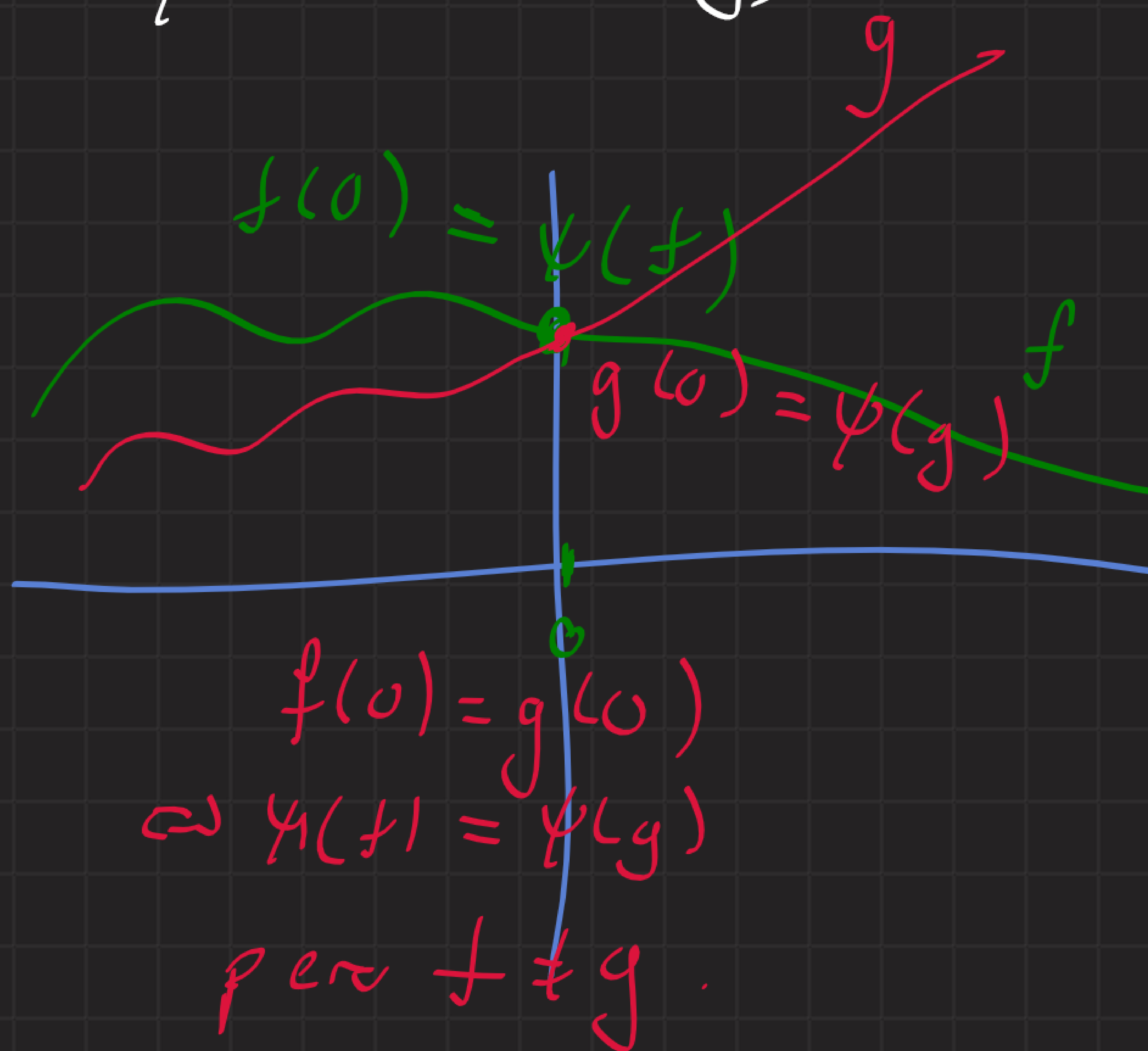
$f \neq g, \quad f(0) = g(0)$

$\iff \psi(f) = \psi(g)$

Luego $\exists f, g \in \mathcal{F},\ f \neq g \wedge \psi(f) = \psi(g)$

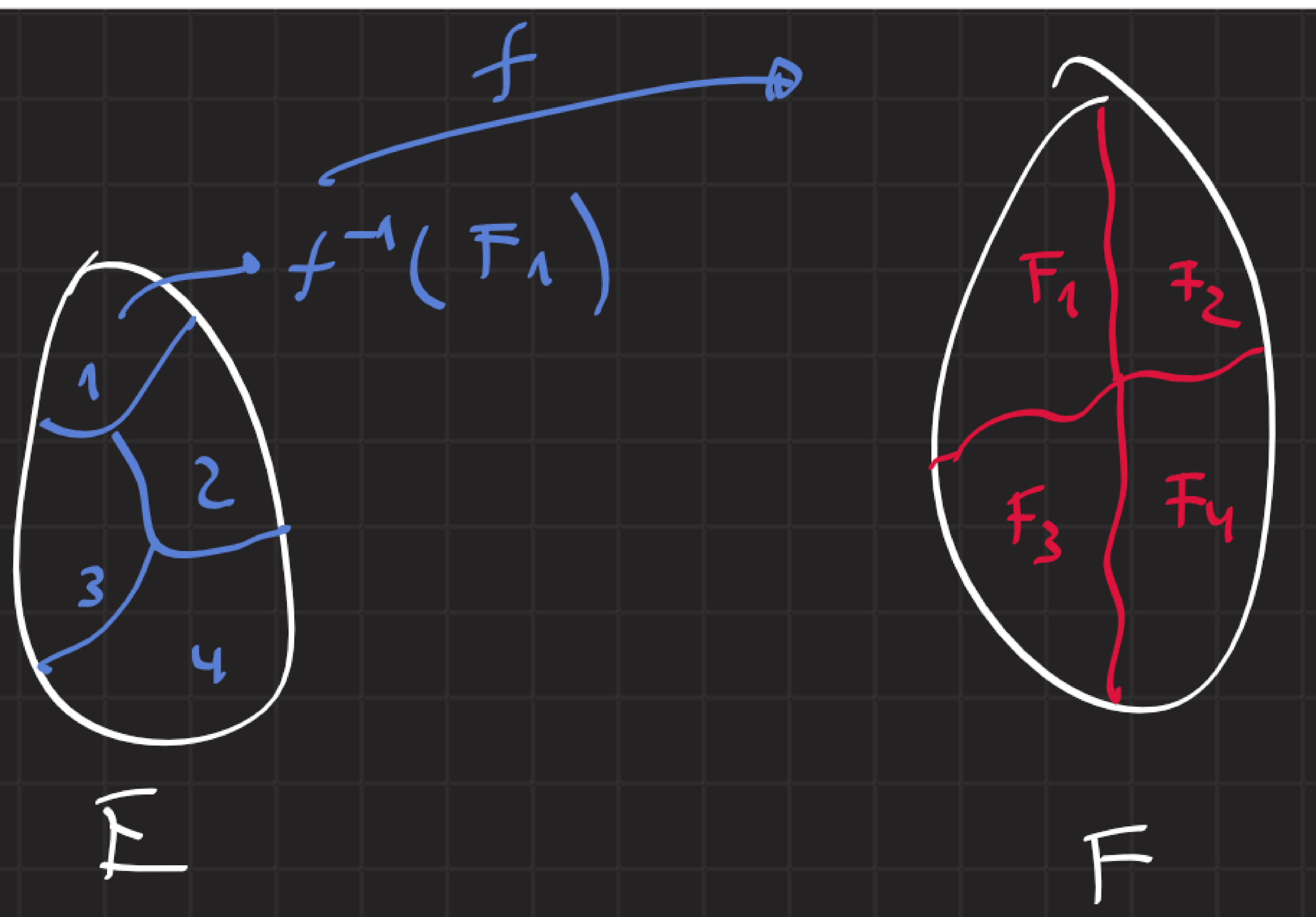
$\iff \psi$ no INY

$\psi(f) = \psi(g) \Rightarrow f = g$



P4. Sean E, F conjuntos no vacíos. Sea $f : E \longrightarrow F$ una función epiyectiva.

(a) Demuestre que si $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ es una partición de F, entonces $\mathcal{E} = \{f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2), \dots, f^{-1}(F_n)\}$ es una partición de E.



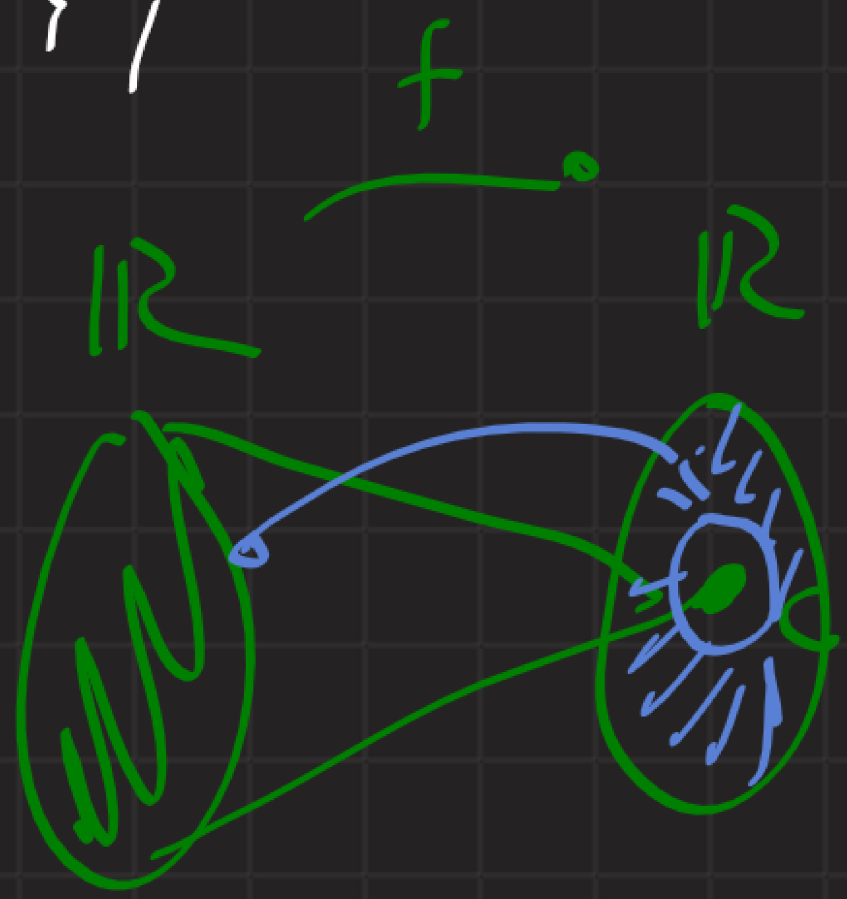
p.d.q: $\mathcal{E} = \{f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_n)\}$ es partición de E.

• $\forall A \in \mathcal{E},\ A \neq \emptyset$ | p.d.q. $\forall i \in \{1 \dots n\}$,

$f^{-1}(F_i) \neq \emptyset$.

$F_i \in \mathcal{F}$ partición, $F_i \neq \emptyset$, luego

$f^{-1}(F_i) \neq \emptyset$ pues f es EPI



pdq $f : A \to B$, $\bar{B} \subseteq B$, $\bar{B} \neq \emptyset$, f EPI,

$\Rightarrow f^{-1}(\bar{B}) \neq \emptyset$.

Como f es epi, $\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$

Como $\bar{B} \neq \emptyset$, tiene elementos, $\bar{B} \subseteq B$. Luego

si $b \in \bar{B} \Rightarrow b \in B \overset{f\ epi}{\Rightarrow} \exists x \in A : f(x) = b$

Luego $x \in f^{-1}(\bar{B}) \Rightarrow f^{-1}(\bar{B}) \neq \emptyset$ ⌟

- $\forall i,j \in \{1 \dots n\},\ i \neq j,\ f^{-1}(F_i) \cap f^{-1}(F_j) = \emptyset$

En efecto, $f^{-1}(F_i) \cap f^{-1}(F_j)$ / $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$

$= f^{-1}(F_i \cap F_j)$ / $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ es partición $\Rightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$

$= f^{-1}(\emptyset)$

$= \emptyset.$

- $\mathcal{E}$ cubre a E: $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{E}} A = E.$ $\quad \mathcal{E} = \{f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_n)\}$

En efecto,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{E}} A = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(F_i)$$ / $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$

$$= f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$$ / $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ es partición de F $\Rightarrow \bigcup F_i = F.$

$= f^{-1}(F)$ / $f: E \to F$, $f^{-1}(F) = E$

$= E.$

$\mathcal{E} = \{f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_n)\}$ es partición de E $\blacksquare$.

(b) HIP: f INY $\wedge$ f EPI.

$\mathcal{E} = \{E_i\}_{i=1}^{n}$ es partición de E

pdq. $\mathcal{F} = \{f(E_i)\}_{i=1}^{n}$ es partición de F.

• $\forall A \in \mathcal{F}, A \neq \emptyset$

Sea $A \in \mathcal{F} \iff A = f(E_i), i \in \{1 \dots n\}$.

Como $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ es partición $\Rightarrow E_i \neq \emptyset$

$E_i \neq \emptyset \Rightarrow f(E_i) \neq \emptyset$ $\boxed{}$

$x \in E_i \Rightarrow x \in E$ y $f: E \to F$

$\Rightarrow f(x) \in F$

$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A : f(x) = y\}$

$f(x) \in F \wedge x \in E_i$

$\iff f(x) \in f(E_i)$

$\therefore f(E_i) \neq \emptyset$

• $\forall i, j \in \{1 \dots n\}, i \neq j, f(E_i) \cap f(E_j) = \emptyset$

$$\cancel{f(E_i) \cap f(E_j) = f(E_i \cap E_j) = f(\emptyset) = \emptyset}$$

$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

pdq. $f(E_i) \cap f(E_j) = \emptyset$

Por contradicción, sea $f(E_i) \cap f(E_j) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ existe $y \in f(E_i) \cap f(E_j)$

$y \in f(E_i) \wedge y \in f(E_j)$

$$\begin{cases} \exists x_i \in E_i : f(x_i) = y \\ \exists x_j \in E_j : f(x_j) = y \end{cases}$$

Vemos que $f(x_i) = f(x_j)$ y como f INY

$\Rightarrow x_i = x_j$

Pero $x_i \in E_i$, $x_j \in E_j$ y como $\{E_i\}_{i=1}^{n}$ es partición $(E_i \cap E_j = \emptyset)$

$x_i \in E_i \wedge x_i \in E_j$

$\Leftrightarrow x_i \in E_i \cap E_j$ —— $\times$

Luego $f(E_i) \cap f(E_j) = \emptyset$.

• $\mathcal{F}$ cubre F, : $\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = F$.

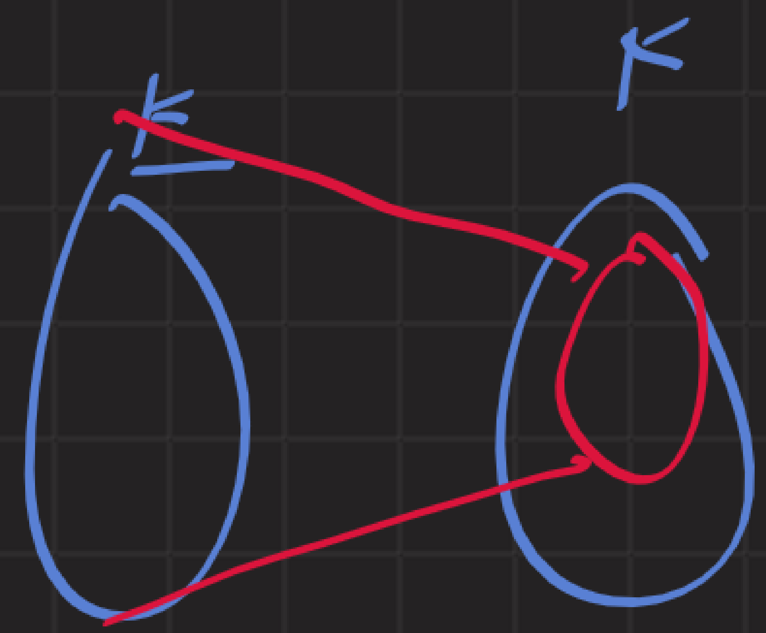
En efecto:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcup_{i=1}^{m} f(E_i)$$ / $f(A)\cup f(B) = f(A\cup B)$

$$= f\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right)$$ // $\{E_i\}$ es partición de E $\Rightarrow \bigcup E_i = E$.

$$= f(E)$$ / f EPI

$$= F.$$



$f: E \to F$

Demostremos f EPI $\Rightarrow f(E) = F$.

$f(E) = F \iff F \subseteq f(E)$

$\iff \forall y \in F,\ y \in f(E)$

$\iff \forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y$

$\iff f$ es EPI.

$\iff V$.

$\therefore\ \mathcal{F}$ es partición de F

($\mathcal{F} = \{f(E_i)\}_{i=1}^{m}$, con $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ partición de E).