

$$\sum_{n=0}^0 a_n = a_0$$

$$\sum_{n=0}^1 a_n = a_0 + a_1$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^m$$

$$\sum_{n=0}^{m+1} a_n = \sum_{n=0}^m a_n + a_{m+1}$$

H.I.

$$P_1] \quad x \equiv_2 y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k$$

a) $\equiv_2$ es relación de equivalencia.

reflexiva

transitiva

simétrica

1) $\equiv_2$ reflexiva: Sean $x \in \mathbb{R}$,

$$x - x = 0 = 2 \cdot 0$$

$$\text{Luego } \exists k \in \mathbb{Z}, x - x = 2 \cdot k$$

$$\Leftrightarrow x \equiv_2 x$$

$\therefore \equiv_2$ reflexiva.

2) $\equiv_2$ simétrica. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $x \equiv_2 y$

queremos demostrar $y \equiv_2 x \Leftrightarrow \exists g \in \mathbb{Z}, y - x = 2g$.

$$x \equiv_2 y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 2k \quad / \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y - x = 2(-k)$$

Luego, tomando $g = -k$

$$\Rightarrow \exists g \in \mathbb{Z}, y - x = 2g$$

$$\Leftrightarrow y \equiv_2 x$$

Luego $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \equiv_2 y \Rightarrow y \equiv_2 x$

$\Rightarrow \equiv_2$ es simétrica.

(iii) $\equiv_2$ es transitiva. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que

$\textcircled{1} \quad x \equiv_2 y \wedge \textcircled{2} \quad y \equiv_2 z$. Queremos demostrar $x \equiv_2 z$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - z = 2k$.

$\textcircled{1} : x \equiv_2 y \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x - y = 2p$

$\textcircled{2} : y \equiv_2 z \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : y - z = 2q$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} : x - z = 2p + 2q$
 $= 2(p + q)$

Como p y q son enteros, $p + q$ también

Luego $\exists k \in \mathbb{Z}, x - z = 2k \quad (k = p + q)$
 $\Rightarrow x \equiv_2 z$,

Luego $\equiv_2$ es transitiva.

b) Encuentre $[0]_{\equiv_2} = \{y \in \mathbb{R} : y \equiv_2 0\}$

Veamos sus elementos:

$$x \in [0]_{\equiv_2} \Leftrightarrow x \equiv_2 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - 0 = 2k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k$$

$$\Leftrightarrow x \text{ es par}$$

$$x \in [0]_{\equiv_2} \Leftrightarrow x \text{ es par}$$

$$\therefore [0]_{\equiv_2} = \{y \in \mathbb{R} : y \text{ par}\}$$

$$= \{y \in \mathbb{Z} : y \text{ par} : \exists k \in \mathbb{Z}, y = 2k\}$$

$$= \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}.$$

c) Demuestra que

$$\mathbb{R}/\equiv_2 = \{ [x]_{\equiv_2} : x \in [0, 2) \}$$

$$= \{ [x]_{\equiv_2} : x \in \mathbb{R} \}$$

$\supseteq$ pues σ posee clases de equivalencia, y $\mathbb{R}/\equiv_2$ es el conjunto de todas las clases de equivalencias.

$\subseteq$ Sea $[x]_{\equiv_2} \in \mathbb{R}/\equiv_2$. La idea es ver que

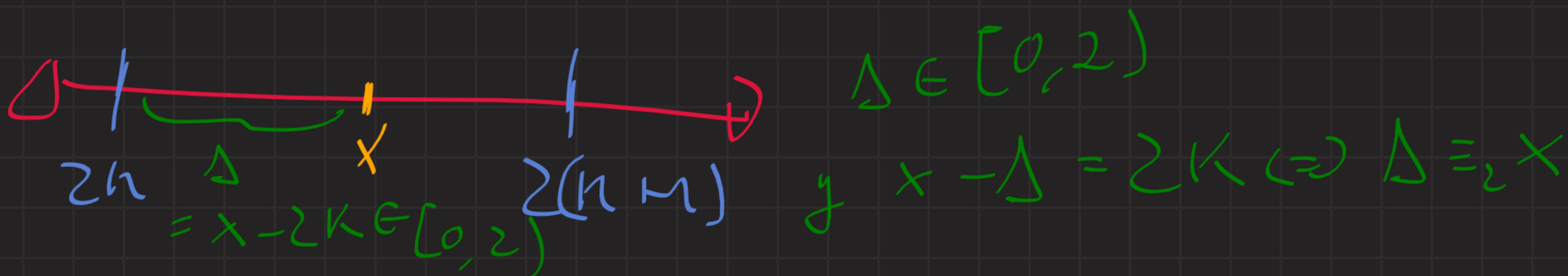
$$[x]_{\equiv_2} \in \{ [y]_{\equiv_2} : y \in [0, 2) \}$$

O sea que existe un $z \in [0, 2) + \cdot q$

$$[x]_{\equiv_2} = [z]_{\equiv_2}$$

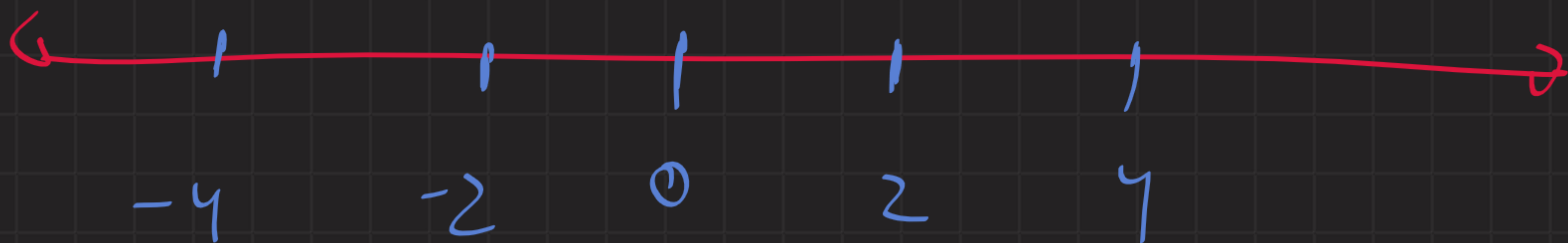
$$\Leftrightarrow x \equiv_2 z$$

Tenemos que encontrar $z \in [0, 2) + \cdot q - x \equiv_2 z$.



¿Puedo afirmar que $x \in [2k, 2(k+1))$?

¡Sí! Porque $\{[2k, 2(k+1))\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es partición de $\mathbb{R}$
... $[-4, -2) [-2, 0) [0, 2) [2, 4) \dots$



y como $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k, 2(k+1))$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x \in [2k, 2(k+1))$

Sea entonces $z = x - 2k$. Verifiquemos que

1) $z \in [0, 2)$: en efecto,

$$x \in [2k, 2(k+1)) \Leftrightarrow 2k \leq x < 2k+2 \quad / -2k$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x - 2k < 2$$

$$\Leftrightarrow x - 2k = z \in [0, 2)$$

2) $x \equiv_2 z$. En efecto

$$x \equiv_2 z \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} : x - z = 2r$$

$$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} : x - (x - 2k) = 2r$$

$$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} : 2k = 2r$$

$$\Leftrightarrow \forall, \text{ tomando } r=k \in \mathbb{Z}$$

Luego tenemos un $z \in [0, 2)$ y

$$x \equiv_2 z$$

$$\Leftrightarrow [x]_{\equiv_2} = [z]_{\equiv_2}$$

$$\Rightarrow [x]_{\equiv_2} \in \{[y]_{\equiv_2} : y \in [0, 2)\}$$

$$\text{Luego } [x]_{\equiv_2} \in \mathbb{R}/\equiv_2 \Rightarrow [x]_{\equiv_2} \in \sigma$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{R}/\equiv_2 \subseteq \sigma$$

by inclusion $\Rightarrow \mathbb{R}/\equiv_2 = \{[x]_{\equiv_2} : x \in [0, 2)\}$

P2] $A \in P(I)$ fijo,

$$X R Y \Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y.$$

a) R es relación de equivalencia

reflexiva
transitiva
simétrica.

(ii) R simétrica: Sean $X, Y \in P(I)$ tales que $X R Y$,
p.d.q. $Y R X$.

$$\begin{aligned} \text{En efecto, } X R Y &\Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y \\ &\Leftrightarrow A \setminus Y = A \setminus X \\ &\Leftrightarrow Y R X \quad \checkmark \end{aligned}$$

Luego R es simétrica

(iii) R transitiva: Sean $X, Y, Z \in P(I)$ tales que
 $X R Y$ y $Y R Z$. p.d.q. $X R Z$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \textcircled{1} X R Y &\Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y \\ \textcircled{2} Y R Z &\Leftrightarrow A \setminus Y = A \setminus Z \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \textcircled{1} X R Y &\Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y \\ \textcircled{2} Y R Z &\Leftrightarrow A \setminus Y = A \setminus Z \end{aligned}} \right\} A \setminus X = A \setminus Z \Leftrightarrow X R Z.$$

$\therefore R$ es transitiva.

$$(b) P(E)/R = \{[X]_R \mid X \in P(A)\}$$

$\supseteq$ ✓

$$\subseteq \text{ Sea } [X]_R \in P(E)/R = \{[Y]_R \mid Y \in P(E)\}$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in P(E), [X]_R = [B]_R$$

$$\Leftrightarrow \exists B \in P(E), X \cap B$$

Queremos encontrar $C \in P(A) + \exists X \cap C$

Entonces, vemos que si $X \cap B$, entonces $X \cap (B \cap A)$ pues:

$$\begin{aligned} X \cap (B \cap A) &\Leftrightarrow A \setminus X = \underline{A \setminus (B \cap A)} \\ &= A \cap (B \cap A)^c \\ &= A \cap (B^c \cup A^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (\underbrace{A \cap A^c}_{\emptyset}) \\ &= A \cap B^c \\ &= A \setminus B \end{aligned}$$

y como $X \cap B$ es cierto, entonces $A \setminus X = A \setminus B$ es cierto

Luego $X \cap (B \cap A)$.

$$\text{Luego } C = B \cap A \subseteq A$$

$$\Rightarrow C \in P(A)$$

$$\text{Luego } A \setminus C = A \setminus (B \cap A)$$

$$= A \setminus B \quad / \text{ MP: } X \not\subseteq B$$

$$= A \setminus X$$

$$\Rightarrow A \setminus C = A \setminus X$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq C, \text{ con } C \in P(A)$$

$$\Rightarrow \exists C \in P(A): X \subseteq C$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in P(A) \quad [X]_R = [C]_R$$

$$\Leftrightarrow [X]_R \in \{[Y]_R : Y \in P(A)\}$$

$$\text{Luego } [X]_R \in P(E)/R \Rightarrow [X] \in \{[Y]_R : Y \in P(A)\}$$

$$\Leftrightarrow P(E)/R \subseteq \{[Y]_R : Y \in P(A)\}$$

Double inclusion

$$\Rightarrow P(E)/R = \{[Y]_R : Y \in P(A)\}.$$

c) para $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X^c \neq Y^c \Rightarrow [X]_{\mathcal{R}} \neq [Y]_{\mathcal{R}}$

(contrareciproca: p.d.g.: $[X^c]_{\mathcal{R}} = [Y^c]_{\mathcal{R}} \Rightarrow X^c = Y^c$)

Sean $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ t. q. $[X^c]_{\mathcal{R}} = [Y^c]_{\mathcal{R}}$

$X \subseteq A$
 $Y \subseteq A$

$$\Leftrightarrow X^c \cap Y^c$$

$$\Leftrightarrow A \setminus X^c = A \setminus Y^c$$

$$\Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$$

$$\Leftrightarrow X = Y$$

$$\Leftrightarrow X^c = Y^c$$

$$\text{Luego } [X^c]_{\mathcal{R}} = [Y^c]_{\mathcal{R}} \Rightarrow X^c = Y^c$$

$$\Leftrightarrow X^c \neq Y^c \Rightarrow [X^c]_{\mathcal{R}} \neq [Y^c]_{\mathcal{R}}$$

que es lo pedido $\square$

$$P_3] a) \sum_{j=3}^{n-1} (j+1)(j+2)$$

$$= \sum_{j=3}^{n-1} j^2 + 3j + 2$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + 3j + 2 - \underbrace{(1^2 + 3 \cdot 1 + 2)}_6 - \underbrace{(2^2 + 3 \cdot 2 + 2)}_{12}$$

-18

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} j^2}_4 + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} 3j}_{13} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} 2}_6$$

$$\sum_{j=3}^{n-1} a_j = \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_1 - a_2$$

$a_3 + a_4 + \dots$ $a_1 + \dots - a_{n-1} - a_n$

$$\text{A] } \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2(n-1) + 1)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$\text{B] } \sum_{j=1}^{n-1} 3j = 3 \sum_{j=1}^{n-1} 1 = 3 \frac{(n-1)(n)}{2} = \frac{3n(n-1)}{2}$$

$$\text{C] } \sum_{j=1}^{n-1} 2 = 2 \sum_{j=1}^{n-1} 1 = 2(n-1 - \cancel{1} + \cancel{1})$$

$$= 2(n-1)$$

Luego, la suma total será

$$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{3n(n-1)}{2} + 2(n-1) - 18 \quad \square$$

$$b) \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-3} \quad \begin{array}{l} +b_{k-1} \\ -b_{k-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} b_k - b_{k-1} \\ b_{k+1} - b_k \end{array}$$

$$= \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-1} + b_{k-1} - b_{k-2} / \begin{array}{l} -b_{k-2} \\ +b_{k-2} \end{array}$$

$$= \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-1} + b_{k-1} - b_{k-2} + b_{k-2} - b_{k-3}$$

$$= \sum_{k=3}^n b_k - b_{k-1} + \sum_{k=3}^n b_{k-1} - b_{k-2} + \sum_{k=3}^n b_{k-2} - b_{k-3}$$

$$= b_n - b_2 + b_{n-1} - b_1 + b_{n-2} - b_0 \quad \square$$

$$c) \sum_{k=l}^n \left(\frac{2}{l} \right)^k, \quad l \in \mathbb{N}$$

Nos ponemos en casos

$$\textcircled{1} \quad \underline{l=2} \quad \sum_{k=2}^n 1 = n - 2 + 1 = n - 1.$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{l \neq 2} \quad \sum_{k=l}^n \left(\frac{2}{l} \right)^k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{l} \right)^k - \sum_{k=0}^{l-1} \left(\frac{2}{l} \right)^k$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: A number line from 0 to n. A blue bracket from 0 to l-1 is labeled l-1. A red bracket from l to n is labeled n. The sum is represented as the area under a curve from l to n, minus the area from 0 to l-1.} \end{array} = \frac{\left(\frac{2}{l} \right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{l} - 1} - \frac{\left(\frac{2}{l} \right)^l - 1}{\frac{2}{l} - 1} \quad \square$$

$$d) \sum_{i=1}^n z^{i+1} \cdot \frac{i}{(i+1)(i+2)}$$

$$= \sum_{i=1}^n z^{i+1} \cdot \left[\frac{(i+2) - (i+1)}{(i+1)(i+2)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n z^{i+1} \cdot \left[\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n z^{i+1} \left[\frac{i}{i+1} - \frac{i}{i+2} \right] \quad \text{⊗}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\cancel{1} - \frac{1}{i+1} - \cancel{1} + \frac{2}{i+2} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n z^{i+1} \left[\frac{2}{i+2} - \frac{1}{i+1} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{z^{i+2}}{i+2} - \frac{z^{i+1}}{i+1}$$

$$\rightarrow a_i = \frac{z^{i+1}}{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{i+1} - a_i$$

$$= a_{n+1} - a_1 = \frac{z^{n+2}}{n+2} - \frac{z^2}{2} \quad \square$$

$$\begin{aligned} & \frac{i}{(i+1)(i+2)} \\ &= \frac{i+x-x}{(i+x)(i+x)} \\ &= 1 - \frac{x}{i+x} \end{aligned}$$

