

P1. Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Demuestre que:

(a) $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

EMPEZAMOS ALAS 14:30

Sea $x \in f(A) \setminus f(B)$

$\Leftrightarrow x \in f(A) \cap f(B)^c \Leftrightarrow x \in f(A) \wedge x \notin f(B)$

(1) $\exists a \in A : f(a) = x$

(2) $\forall b \in B : f(b) \neq x$

Sea $a \in A : f(a) = x$. Notemos que $a \notin B$.
(si $a \in B \Rightarrow \exists b \in B : f(b) = x$ y eso contradice (2))

$a \in A \wedge a \notin B \Leftrightarrow a \in A \setminus B$ y (1): $f(a) = x$

$x \in f(A) \setminus f(B) \rightarrow x \in f(A \setminus B) \rightarrow x \in f(A \setminus B)$. Luego $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

(b) $[(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)] \Leftrightarrow f$ es inyectiva.

$\Rightarrow$ Sean $x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$. Como $\{x_1\}, \{x_2\} \subseteq E$

f iny si:

$\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
 $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$

$f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) = f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$

$\Leftrightarrow \{f(x_1)\} \setminus \{f(x_2)\} = f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$

pero $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \emptyset = f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$

Si $\{x_1\} \setminus \{x_2\} \neq \emptyset, \exists a \in \{x_1\} \setminus \{x_2\}$

$\Rightarrow f(a) \in f(\{x_1\} \setminus \{x_2\}) = \emptyset$

$\Rightarrow A \subseteq B$

$\Rightarrow f(a) \in \emptyset \times$

Luego $\{x_1\} \setminus \{x_2\} = \emptyset \Leftrightarrow \{x_1\} \subseteq \{x_2\} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Luego $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow f$ iny

$$\boxed{\Rightarrow} f \text{ iny} \Rightarrow \forall A, B \subseteq E, f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$$

$\subseteq$ Parte (a)

$$x \in A \wedge x \notin B$$

$$\boxed{\supseteq} \text{ Sea } y \in f(A \setminus B) \Leftrightarrow \exists x \in A \setminus B : f(x) \stackrel{(i)}{=} y$$

En particular, $\exists x \in A : f(x) = y \Rightarrow y \in f(A)$ (i)

Nos falta ver $y \notin f(B)$. Supongamos por contradicción que $y \in f(B) \Leftrightarrow \exists \tilde{x} \in B : f(\tilde{x}) \stackrel{(ii)}{=} y$

$$(i) \wedge (ii) \Rightarrow f(\tilde{x}) = f(x) \quad / f \text{ iny}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = x \quad \text{pero } \tilde{x} \in B \wedge x \in A \setminus B$$

$$\Rightarrow x \in B \wedge x \notin B \quad \text{--- } \times$$

Luego $y \notin f(B)$ (ii)

Luego $y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B)$

Luego $\forall y, y \in f(A \setminus B) \Rightarrow y \in f(A) \setminus f(B)$

$$\Leftrightarrow f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B).$$

Luego $\supseteq \wedge \subseteq \Rightarrow f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ (cuando $f \text{ iny}$)

$$(c) (\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$$

$$\text{Sea } y \in f(f^{-1}(Y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(Y) : f(x) = y$$

$$\text{Sea } \hat{x} \in f^{-1}(Y) : f(\hat{x}) = y$$

$$\hat{x} \in f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(\hat{x}) \in Y$$

$$\Rightarrow y \in Y \quad \square$$

P2. Función diferencia

Se define la función $F: \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ por:

$$x, y \subseteq E \rightarrow F((X, Y)) = X \setminus Y$$

a) Demuestre que $F^{-1}(\{E, \emptyset\}) = \underbrace{\{(E, \emptyset)\}}_A \cup \underbrace{\{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq Y\}}_B$

$$\supseteq (P, Q) \in A \cup B$$

Caso 1 $(P, Q) \in A \Rightarrow (P, Q) \in \{(E, \emptyset)\}$

$$\Leftrightarrow (P, Q) = (E, \emptyset)$$

$$\Leftrightarrow P = E \wedge Q = \emptyset$$

$$F(E, \emptyset) = E \setminus \emptyset = E$$

$$F(E, \emptyset) \in \{E, \emptyset\} \Leftrightarrow (P, Q) \in F^{-1}(\{E, \emptyset\})$$

Caso 2: $(P, Q) \in \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) : X \subseteq Y\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P \subseteq Q. \text{ Luego } F(P, Q) &= P \setminus Q \\ &= P \cap Q^c \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} A \cap B^c &= \emptyset \\ \Leftrightarrow A &\subseteq B \end{aligned}$$

$$\text{Luego } (P, Q) \in B \Rightarrow (P, Q) \in A \cup B$$

$$F(P, Q) \in \{\emptyset, E\} \Leftrightarrow (P, Q) \in F^{-1}(\{\emptyset, E\}) \quad \square.$$

$$\text{Luego } A \cup B \subseteq F^{-1}(\{\emptyset, E\}).$$

$$\subseteq (P, Q) \in F^{-1}(\{\emptyset, E\})$$

$$\Leftrightarrow F(P, Q) \in \{\emptyset, E\}$$

$$\Leftrightarrow F(P, Q) = \emptyset \vee F(P, Q) = E.$$

Casos $\textcircled{2}$

$\textcircled{4}$

$$\textcircled{1} F(P, Q) = E$$

$$\Leftrightarrow P \setminus Q = E$$

$$\Leftrightarrow P \cap Q^c = E \Rightarrow P = E \wedge Q^c = E$$

$$P \subseteq E, Q^c \subseteq E$$

$$Q = \emptyset$$

$$\Rightarrow P \cap Q^c \subseteq E$$

$$\Rightarrow (P, Q) = (E, \emptyset)$$

$$\Rightarrow P \cap Q^c \neq E$$

$$\Leftrightarrow (P, Q) \in A \cup B$$

$$A = \{(E, \emptyset)\}$$

$$\textcircled{2} F(P, Q) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow P \setminus Q = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow P \cap Q^c = \emptyset$$

$$\Rightarrow P \subseteq Q$$

$$A \cap B^c = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow (P, Q) \in \{(x, y) \in P(E) \times P(E) : x \subseteq y\}$$

$$\Leftrightarrow (P, Q) \in B$$

$$\Rightarrow (P, Q) \in A \cup B$$

Luego, en todas las casos $(P, Q) \in F^{-1}(\{\emptyset, E\})$

$$\Rightarrow (P, Q) \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow F^{-1}(\{\emptyset, E\}) \subseteq A \cup B.$$

$$\text{Luego } \subseteq \supseteq \Rightarrow F^{-1}(\{\emptyset, E\}) = A \cup B$$

b) Determine $F(D)$, con $D = \{(X, X) \mid X \in \mathcal{P}(E)\}$

$$F(X, X) = X \setminus X = \emptyset$$

$$F(D) = \{ \gamma \in \mathcal{P}(E) : \exists (P, Q) \in D, F(P, Q) = \gamma \}$$

$$= \{ F(P, Q) : (P, Q) \in D \}$$

$$= \{ F(P, Q) : (P, Q) = (X, X), X \in \mathcal{P}(E) \}$$

$$= \{ F(X, X), X \in \mathcal{P}(E) \}$$

$$= \{ X \setminus X : X \in \mathcal{P}(E) \}$$

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

$$= \{\emptyset\}.$$

c) Demuestre que F es sobreyectiva, pero no inyectiva

EPI.

Sea $\gamma \in P(E)$: basta tomar $(\gamma, \emptyset) \in P(E) \times P(E)$,

$$\text{Luego: } F(\gamma, \emptyset) = \gamma \setminus \emptyset = \gamma$$

$$\text{Luego: } \forall \gamma \in P(E), \exists (P, Q) \in P(E) \times P(E): F(P, Q) = \gamma$$

$$\Leftrightarrow F \in P(\gamma).$$

$$\underline{\text{INY}} \quad F(A, B) = A \setminus B \quad (X, X) \neq (\gamma, \gamma) \checkmark \otimes$$

$$(\gamma, \emptyset) \neq (\emptyset, \gamma) \times$$

$$F(\gamma, \emptyset) = \gamma \setminus \emptyset = \gamma \quad (\emptyset, \gamma) \neq (\emptyset, \emptyset) \checkmark (\gamma \neq \emptyset)$$

$$F(\emptyset, \gamma) = \emptyset \setminus \gamma = \emptyset \quad \left. \begin{array}{l} F(\gamma, \emptyset) = \gamma \\ F(\emptyset, \gamma) = \emptyset \end{array} \right\} \neq$$

⊗ Sea $X \neq \gamma$ (sólo ocurre cuando $E \neq \emptyset$)

$$(X, X) \neq (\gamma, \gamma)$$

$$\text{Luego } \exists (A, B), (C, D) \in P(E)^2,$$

$$F(X, X) = X \setminus X = \emptyset$$

$$F(A, B) = F(C, D) \wedge (A, B) \neq (C, D)$$

$$F(\gamma, \gamma) = \gamma \setminus \gamma = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \sim F \text{ INY.}$$

P3. Relación de Orden

Sea $K \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ fijo. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:

$$A \mathcal{R}_K B \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.

• $\mathcal{R}_K$ Refleja: En efecto, sea $A \in \mathcal{P}(E)$, se tiene que

$$A \cap K \subseteq A$$

$$\textcircled{*} \quad X \cap K \subseteq X \subseteq X \cup K$$

$$\text{Luego } \Leftrightarrow A \mathcal{R}_K A$$

• $\mathcal{R}_K$ Transitiva: Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, supongamos

$$\textcircled{1} \quad A \mathcal{R}_K B \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B$$

$$\textcircled{*} \quad A \subseteq B$$

$$\textcircled{2} \quad B \mathcal{R}_K C \Leftrightarrow B \cap K \subseteq C$$

$$\Leftrightarrow A \cap K \subseteq B \cap K$$

$$a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} c$$

$$A \cap K \subseteq B \quad / \quad \cap K$$

$$\Rightarrow A \cap K \cap K \subseteq B \cap K$$

$$\Leftrightarrow A \cap K \subseteq B \cap K \subseteq C \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow A \cap K \subseteq C \Leftrightarrow A \mathcal{R}_K C$$

Luego $\mathcal{R}_K$ es transitiva.

b) Demuestre que R_K es una relación de orden $\Leftrightarrow K = E$

Ya sabemos R_K reflexiva y transitiva, Faltan antisim.

$$\boxed{\Rightarrow} K=E : A R_E B \Leftrightarrow A \cap E \subseteq B \quad / A \subseteq E \\ \Leftrightarrow A \subseteq B, \quad A \cap E = A$$

Luego antisimetría: si $A R_E B \wedge B R_E A$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Leftrightarrow A = B.$$

Luego $A R_E B \wedge B R_E A \Rightarrow A = B$

Entonces R_K es antisimétrica (además reflexiva y trans)

$\Rightarrow R_E$ es orden

$\boxed{\Rightarrow} R_K$ orden (antisim.) $\Rightarrow K = E$

$$a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$$

$$\bullet K R_E \Leftrightarrow K \cap K \subseteq E$$

$$\Leftrightarrow K \subseteq E \Leftrightarrow V$$

$$\bullet A R_E B \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B$$

$$\bullet E R_K K \Leftrightarrow E \cap K \subseteq K$$

$$\Leftrightarrow K \subseteq K \Leftrightarrow V$$

$$K \subseteq E \Rightarrow K \cap E = K$$

Luego $K R_K E \wedge E R_K K \stackrel{\text{antisim.}}{\Rightarrow} E = K$

P4. Función de relaciones

Sea una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Sea, además:

$$\bar{\mathcal{R}}: A \rightarrow \mathcal{P}(B)$$

$$x \mapsto \bar{\mathcal{R}}(\{x\}), \text{ con } \mathcal{R}(\{x\}) = \underbrace{\{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R}\}}_{\in \mathcal{P}(B)}$$

Demuestre que la función $H: \mathcal{P}(A \times B) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathcal{P}(B)), \mathcal{R} \mapsto \bar{\mathcal{R}}$, es inyectiva, donde

$$\mathcal{F}(A, \mathcal{P}(B)) = \{f: A \rightarrow \mathcal{P}(B) \mid f \text{ función}\}$$

$$\text{Sean } \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subseteq A \times B.$$

$$H(\mathcal{R}_1) = H(\mathcal{R}_2)$$

$$H(\mathcal{R}_1) = \bar{\mathcal{R}}_1, \bar{\mathcal{R}}_1(\{x\}) = \{y \in B : (x, \mathcal{R}_1 y)\}$$

$$H(\mathcal{R}_2) = \bar{\mathcal{R}}_2, \bar{\mathcal{R}}_2(\{x\}) = \{y \in B, x \mathcal{R}_2 y\}$$

queremos probar $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$

$$\text{Sea } (x, y) \in \mathcal{R}_1 \subseteq A \times B.$$

$$H(\mathcal{R}_1) = H(\mathcal{R}_2)$$

$$x \mathcal{R}_1 y \Leftrightarrow y \in \bar{\mathcal{R}}_1(\{x\})$$

$$\bar{\mathcal{R}}_1 = \bar{\mathcal{R}}_2$$

$$\Leftrightarrow y \in \bar{\mathcal{R}}_2(\{x\})$$

$$\Leftrightarrow x \mathcal{R}_2 y$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_2$$

$$(x, y) \in \mathcal{R}_1 \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2. \text{ Luego } H \text{ es inyectiva.}$$