

MA1101-7 Introducción al Álgebra**Profesor:** Pablo R. Dartnell R.**Auxiliares:** Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras**Auxiliar 6 - Imagen, Preimagen y Relaciones de Orden**

7 de mayo de 2021

P1. Propiedades de imagen y preimagenSea $f : E \rightarrow F$ una función. Demuestre que:

- (a) $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
- (b) $[(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)] \Leftrightarrow f$ es inyectiva.
- (c) $(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
- (d) $[(\forall Y \subseteq F) Y = f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.
- (e) $(\forall Y \subseteq F) f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

P2. Función diferenciaSe define la función $F : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ por:

$$F((X, Y)) = X \setminus Y$$

- a) Demuestre que $F^{-1}(\{E, \emptyset\}) = \{(E, \emptyset)\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \mid X \subseteq Y\}$
- b) Determine $F(D)$, con $D = \{(X, X) \mid X \in \mathcal{P}(E)\}$
- c) Demuestre que F es sobreyectiva, pero no inyectiva

P3. Relación de OrdenSea $K \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ fijo. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:

$$A \mathcal{R}_K B \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B$$

- a) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.
- b) Demuestre que $\mathcal{R}_K$ es una relación de orden $\Leftrightarrow K = E$

P4. Función de relacionesSea una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Sea, además:

$$\overline{\mathcal{R}} : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$$

$$x \mapsto \overline{\mathcal{R}}(\{x\}), \text{ con } \mathcal{R}(\{x\}) = \{y \in B : (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

Demuestre que la función $H : \mathcal{P}(A \times B) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathcal{P}(B)), \mathcal{R} \mapsto \overline{\mathcal{R}}$, es inyectiva, donde

$$\mathcal{F}(A, \mathcal{P}(B)) = \{f : A \rightarrow \mathcal{P}(B) \mid f \text{ función}\}$$

P5. (Propuesto:) Orden LexicográficoEn $\mathbb{R}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ definimos la relación $\prec$ (orden lexicográfico) por:

$$(a, b) \prec (c, d) \Leftrightarrow [a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)]$$

Demuestre que $\prec$ es una relación de orden

Resumen

- **[Conjunto Imagen]:** Sea $f : A \rightarrow B$ función, y $C \subseteq A$. Se define el conjunto imagen de C por f :

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

- **[Equivalencia epiyectividad]:** $f : A \rightarrow B$ es epiyectiva si y solo si $f(A) = B$

- **[Propiedades Imagen]:**

- $A \subseteq C \implies f(A) \subseteq f(C)$
- $f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C)$
- $f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$

- **[Conjunto Preimagen]:** Sea $f : A \rightarrow B$ función, y $D \subseteq B$. Se define el conjunto preimagen de D por f :

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

- **[Propiedades PreImagen]:**

- $B \subseteq D \implies f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$

- **[Inclusiones relevantes]:** Sea $f : A \rightarrow B$, con $C \subseteq A$ y $D \subseteq B$, entonces:

- $C \subseteq f^{-1}(f(C))$
- $f(f^{-1}(D)) = D \cap f(A)$ En particular:
 $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$

- **[Inyectividad y sobreyectividad]:** Sea $f : A \rightarrow B$ función. Se tiene:

- f es inyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee (\exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\})$$

- f es epiyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

- f si es biyectiva, entonces:

$$\forall C \subseteq B, f^{-1}(\{y\}) = (\{f^{-1}(y)\})$$

- **[Relación]:** Es una tripleta $(A, B, \mathcal{R})$ que cumple $\mathcal{R} \subset A \times B$. Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ denotamos $a\mathcal{R}b$

- **[Propiedades de relaciones]:** Una relación R en A es:

- **Refleja:** si $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$
- **Simétrica:** si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$
- **Antisimétrica:** si $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y$
- **Transitiva:** $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

- **[Ejemplo de relación]:** En $\mathbb{Z}$ se define la relación divisibilidad, que se anota $a|b$ si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.

- **[Relación de orden]:** $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A , si es una relación **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Observación: $\mathcal{R}$ es un orden total si para todo $x, y \in A$, x y y son comparables, es decir $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$.

- **[Relación de equivalencia]:** $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A , si es una relación **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.



F(x)

F^{-1}(x)

