

P1. Se define la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

(a) ¿Es f epiyectiva?

(b) ¿Es f inyectiva?

(a) Sea $n \in \mathbb{N}$, queremos demostrar que $\exists x \in \mathbb{N} : f(x) = n$

$n = \frac{2n}{2} = f(2n)$. En efecto, tomando $x = 2n$:

$f(2n) = \frac{2n}{2} = n$ y como n es arbitrario:

$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}) f(x) = n$ (en este caso, $x = 2n$)

$\Rightarrow f$ es EPI.

(b) ¿ f iny?

Si $f(\text{impar}) = \hat{\text{par}}$, podemos encontrar un par t q.

$$f(\text{par}) = \hat{\text{par}}$$

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4 = \frac{8}{2} = f(8)$$

Luego, tenemos $f(1) = f(8)$, pero $1 \neq 8$

Luego, f no es inyectiva.

P2. Sean A, B conjuntos, se define $g : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A \cup B)$ dada por:

$$g((X, Y)) = X \cup Y$$

(a) Demuestre que g es epiyectiva.



queremos demostrar : $\forall Z \in \mathcal{P}(A \cup B), \exists (X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) :$
 $g(X, Y) = Z$

Sería fácil : $X = Y = Z$, pero $g(X, Y) = Z \cup Z = Z$ ✓
 pero no sabemos si $Z \in \mathcal{P}(B)$. Restringiendo:

$$\begin{aligned} X &= Z \cap A \subseteq A \Rightarrow Z \cap A \in \mathcal{P}(A) \\ Y &= Z \cap B \subseteq B \Rightarrow Z \cap B \in \mathcal{P}(B) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} (Z \cap A, Z \cap B) &\in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Calculamos } g(X, Y) : & \quad (Z \in \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow Z \subseteq A \cup B) \\ g(Z \cap A, Z \cap B) &= (Z \cap A) \cup (Z \cap B) \\ &= Z \cap (A \cup B) \quad / \quad \begin{aligned} Z &\subseteq A \cup B \\ \Rightarrow Z \cap (A \cup B) &= Z \end{aligned} \\ &= Z \quad \square \end{aligned}$$

Luego $\forall Z \in \mathcal{P}(A \cup B), \exists (X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) :$
 $g(X, Y) = Z$. (tomando $X = Z \cap A$)
 $Y = Z \cap B$

$\Rightarrow g$ EPI.

(b) Demuestre que: g es inyectiva $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Por equivalencia dividida:

① $\Rightarrow$ ② Supongamos por contradicción $A \cap B \neq \emptyset$, es decir,

$$\exists \bar{x} \in A \cap B \Rightarrow \bar{x} \in A \wedge \bar{x} \in B$$

$$\Leftrightarrow \{\bar{x}\} \subseteq A \wedge \{\bar{x}\} \subseteq B.$$

$$\Rightarrow (\{\bar{x}\}, \emptyset) \in P(A) \times P(B)$$

$$(\emptyset, \{\bar{x}\}) \in P(A) \times P(B)$$

Tenemos que $(\{\bar{x}\}, \emptyset) \neq (\emptyset, \{\bar{x}\})$, pero

$$g(\emptyset, \{\bar{x}\}) = \emptyset \cup \{\bar{x}\}$$

$$= \{\bar{x}\}$$

$$= \{\bar{x}\} \cup \emptyset$$

$$= g(\{\bar{x}\}, \emptyset)$$

$$\text{Encontré } (x, y) \neq (z, w) : g(x, y) = g(z, w)$$

pero eso no es posible por ① ~~✗~~

$$\text{Luego } g \text{ inv.} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \quad \square$$

(2) $\Rightarrow$ (1) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow g \text{ inv}$.

Sean $(x, y), (w, z) \in P(A) \times P(B)$
 $g(x, y) = g(w, z)$. Demuestre $(x, y) = (w, z)$.

Función: $g(x, y) = g(w, z)$

$A \cap B = \emptyset$

$\hookrightarrow X \cup Y = W \cup Z \quad / \cap A$

$\Rightarrow (X \cup Y) \cap A = (W \cup Z) \cap A$

$\hookrightarrow (X \cap A) \cup (Y \cap A) = (W \cap A) \cup (Z \cap A)$

Vemos: $X \cap A = X$ pues $X \subseteq A$

$Y \cap A = \emptyset$ pues $Y \cap A \subseteq B \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset \subseteq Y \cap A \subseteq \emptyset \Rightarrow Y \cap A = \emptyset$.

Análogamente $W \cap A = W$
 $Z \cap A = \emptyset$.

Luego $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = (Z \cap A) \cup (W \cap A)$

$\Rightarrow X \cup \emptyset = W \cup \emptyset$

$\Rightarrow X = W$. (a)

$(X, y) = (W, z)$

Para demostrar $y = z$, $X \cup Y = W \cup Z \quad / \cap B$.

(propuesto)

$\Rightarrow Y = Z$. (b)

(a) y (b) $\Rightarrow (x, y) = (w, z)$.

$$\forall (x, y)(w, z) \in P(A) \times P(B), g(x, y) = g(w, z) \\ \Rightarrow (x, y) = (w, z)$$

$$\Rightarrow g \text{ es } 1\text{-}1 \text{ y } \text{in.}$$

Luego, $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$ y $\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{1} \Leftrightarrow \textcircled{2}$
 es decir $g \text{ in.} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

P3. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo, para $A \subseteq \mathcal{U}$ se definen las funciones: $\theta_A: \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ y $\delta_A: \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ por:

$$\theta_A(X) = A \cap X \quad \delta_A(X) = A \Delta X$$

(a) Demuestre que δ_A es biyectiva $\forall A \subseteq \mathcal{U}$

$$(a) \delta_A: \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) : \delta_A(X) = A \Delta X$$

$$\text{INY} \mid \text{Sean } X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) : \delta_A(X) = \delta_A(Y).$$

queremos demostrar $X = Y$. En efecto:

$$\delta_A(X) = \delta_A(Y)$$

$$X = Y$$

$$\Leftrightarrow A \Delta X = A \Delta Y \quad / \quad A \Delta$$

$$\Leftrightarrow A \Delta (A \Delta X) = A \Delta (A \Delta Y) \quad / \quad \Delta \text{ asociativa}$$

$$\Leftrightarrow (A \Delta A) \Delta X = (A \Delta A) \Delta Y \quad / \quad A \Delta A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \Delta X = \emptyset \Delta Y$$

$$\Leftrightarrow (\emptyset \setminus X) \cup (X \setminus \emptyset) = (\emptyset \setminus Y) \cup (Y \setminus \emptyset)$$

$$\Leftrightarrow \emptyset \cup X = \emptyset \cup Y$$

$$\Leftrightarrow X = Y, \text{ que es lo que queramos demostrar.}$$

Luego δ_A INY.

$$\text{EPI} \mid \text{Vimos, } A \Delta (A \Delta B) = B. \text{ Entonces}$$

$$\delta_A \text{ EPI} \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U}), \exists X \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) : \delta_A(X) = Y.$$

En efecto, tomando $X = A \Delta Y$:

$$\delta_A(X) = \delta_A(A \Delta Y) = A \Delta (A \Delta Y) = Y.$$

$$\text{Luego } \delta_A \text{ es EPI. } \delta_A \text{ INY} \wedge \delta_A \text{ EPI} \Rightarrow \delta_A \text{ BIY.}$$

(b) Demuestre que: θ_A es inyectiva $\iff A = \mathcal{U} \iff \theta_A$ es epiyectiva

$$\theta_A: P(\mathcal{U}) \rightarrow P(\mathcal{U}) : \theta_A(X) = A \cap X.$$

Por equivalencia dividida:

$$\text{Notemos que si (ii): } \theta_A(X) = \theta_{\mathcal{U}}(X) = \mathcal{U} \cap X$$

$$\text{y como } X \in P(\mathcal{U}) \Leftrightarrow X \subseteq \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow X \cap \mathcal{U} = X. \text{ Luego } \theta_{\mathcal{U}}(X) = X$$

Notemos que $\theta_{\mathcal{U}}$ es la identidad ($\theta_{\mathcal{U}} = \text{Id}_{P(\mathcal{U})}$) y la identidad es biyectiva $\Rightarrow \theta_{\mathcal{U}}$ iny y $\theta_{\mathcal{U}}$ epi.

$$\text{Luego (ii)} \Rightarrow \text{(i)} \wedge \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}$$

$$\text{Nos falta (i)} \Rightarrow \text{(ii)} \wedge \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}$$

$$\underline{i \Rightarrow ii} \quad \neg(ii) \Rightarrow \neg(i) \Leftrightarrow A \neq \mathcal{U} \Rightarrow \theta_A \text{ no iny.}$$

$$\Sigma: A \neq \mathcal{U}, \exists \bar{x} \in \mathcal{U}, \bar{x} \notin A$$

$$\text{Luego } \theta_A(\{\bar{x}\}) = A \cap \{\bar{x}\} = \emptyset \quad (\text{por } \bar{x} \notin A).$$

$$\theta_A(\emptyset) = A \cap \emptyset = \emptyset.$$

$$\theta_A(\{\bar{x}\}) = \theta_A(\emptyset), \text{ pero } \{\bar{x}\} \neq \emptyset$$

$$\text{Luego } \theta_A \text{ no es iny.}$$

$$\boxed{(iii) \Rightarrow (ii)} \quad \Theta_A \text{ EPI} \Rightarrow A = \mathcal{U}$$

$$\Leftrightarrow A \neq \mathcal{U} \Rightarrow \Theta_A \text{ no EPI.} \quad \begin{matrix} \Theta_A(X) \\ = A \cap X \end{matrix}$$

$$\text{Si } A \neq \mathcal{U}, \exists \bar{x} \in \mathcal{U}, \bar{x} \notin A \quad B \cap X \subseteq B \subseteq B \cup X$$

$$\text{Luego, } \Theta_A(X) = X \cap A \subseteq A \quad \forall X \in P(\mathcal{U})$$

$$\text{y como } \bar{x} \notin A \Rightarrow \{\bar{x}\} \notin A$$

$$\Rightarrow \Theta_A(X) \neq \{\bar{x}\} \quad \forall X \in P(\mathcal{U})$$

$$g \text{ EPI} \Leftrightarrow \forall Y \in P(\mathcal{U}) \exists X \in P(\mathcal{U}) : \Theta_A(X) = Y$$

$$g \text{ NO EPI} \Leftrightarrow \exists Y \in P(\mathcal{U}) \forall X \in P(\mathcal{U}) : \Theta_A(X) \neq Y$$

(es claro?)

$$\text{Si, pues si } Y = \{\bar{x}\} \notin A, \quad \forall X \in P(\mathcal{U})$$

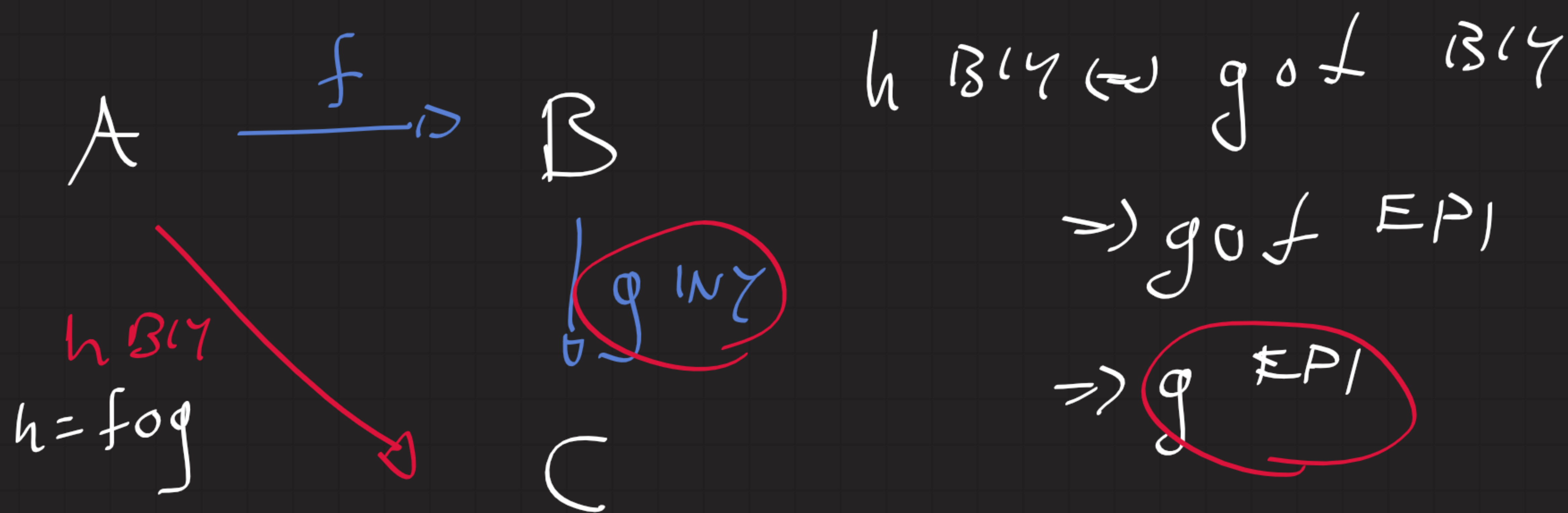
$$\Theta_A(X) \subseteq A \quad \text{y } \{\bar{x}\} \notin A \quad \square.$$

Luego g no es EPI.

$$\text{Luego } (ii) \Rightarrow (i), (ii') \Rightarrow (iii), (i) \Rightarrow (ii), (iii) \Rightarrow (ii)$$

$$\text{Luego } (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii), \text{ que era lo pedido.}$$

P4. Sean A , B y C conjuntos, y sean $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : A \rightarrow C$ funciones tales que g es inyectiva, h es biyectiva, y $h = g \circ f$. Demuestre que f y g son biyectivas, y determine f^{-1} en términos de g , h y/o sus inversas.



$g \text{ INY} \wedge g \text{ EPI} \Rightarrow g \text{ B1Y}$, con inversa $g^{-1} : C \rightarrow B$.

$$h = g \circ f / g^{-1} \circ$$

$$\Leftrightarrow g^{-1} \circ h = g^{-1} \circ (g \circ f) / \circ \text{ asocia}$$

$$\Leftrightarrow g^{-1} \circ h = (g^{-1} \circ g) \circ f / g^{-1} \text{ inversa de } g$$

$$\Leftrightarrow g^{-1} \circ h = \text{id}_B \circ f / \text{id}_B \circ f = f.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g^{-1} \circ h = f} \text{ y como } g^{-1} \text{ y } h \text{ B1Y}$$

$$\Rightarrow g^{-1} \circ h \text{ B1Y}$$

$$\Leftrightarrow f \text{ B1Y} \checkmark$$

$$\text{Calculamos } f^{-1}: g^{-1} \circ h = f / (\quad)^{-1} \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$f^{-1} = (g^{-1} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (g^{-1})^{-1}$$

$$\boxed{f^{-1} = h^{-1} \circ g}$$

$$(g^{-1})^{-1} = g \checkmark$$