MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar 5 - Funciones

30 de abril de 2021

P1. Se define la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

(a) ¿Es f epiyectiva?

(b) ¿Es f inyectiva?

P2. Sean A, B conjuntos, se define $g : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A \cup B)$ dada por:

$$g((X,Y)) = X \cup Y$$

(a) Demuestre que g es epiyectiva.

(b) Demuestre que: g es inyectiva $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

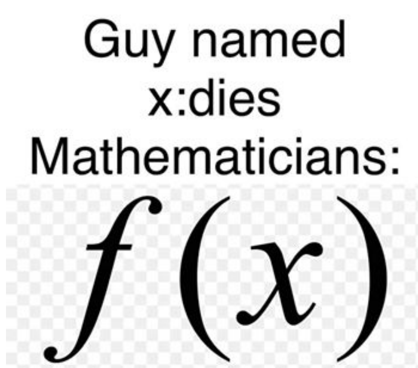
P3. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto universo, para $A \subseteq \mathcal{U}$ se definen las funciones: $\theta_A : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ y $\delta_A : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ por:

$$\theta_A(X) = A \cap X \qquad \delta_A(X) = A \Delta X$$

(a) Demuestre que δ_A es biyectiva $\quad \forall A \subseteq \mathcal{U}$

(b) Demuestre que: θ_A es inyectiva $\iff A = \mathcal{U} \iff \theta_A$ es epiyectiva

P4. Sean A, B y C conjuntos, y sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : A \longrightarrow C$ funciones tales que g es inyectiva, h es biyectiva, y $h = g \circ f$. Demuestre que f y g son biyectivas, y determine f^{-1} en términos de g, h y/o sus inversas.



Resumen

- **[Definición Función]**: Una función de A a B ($f : A \longrightarrow B$) es una 3-tupla $f = (A, B, G)$ que satisface:
  - $G \subseteq A \times B$
  - $\forall a \in A, \exists! b \in B,\ (a, b) \in G$

  Obs. : Para clarificar conceptos:

  - Podemos escribir $b = f(a)$ pues b -dado a- posee un unico valor.
  - $G = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
  - A es llamado dominio de f ($Dom\ f$) y B codominio de f ($Cod\ f$).

- **[Igualdad de Funciones]**: Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ son funciones, entonces

$$f = g \iff Dom\ f = Dom\ g \wedge Cod\ f = Cod\ g \wedge \forall x \in Dom\ f, f(x) = g(x)$$

  Obs. : Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales: $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$

- **[Inyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- **[Epiyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es epiyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A,\ y = f(x)$$

- **[Biyectividad]**: Diremos que una función $f : A \to B$ es biyectiva si es epiyectiva e inyectiva a la vez, o equivalentemente:

$$\forall y \in B, \exists! x \in A,\ y = f(x)$$

- **[Inversa]**: Dada $f : A \to B$, se define $f^{-1} : B \to A$ como:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

  Observación:

  - $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$
  - $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$

- **[Composición]**: Dadas $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se define $g \circ f$ como:

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

  Observación: La composición asocia: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

- **[Propiedades con la composición]**: Dadas $f : A \to B$ y $g : B \to C$:

  a) Si f y g son inyectivas (epiyectivas, biyectivas respectivamente) entonces $g \circ f$ es inyectiva (epiyectiva, biyectiva respectivamente)

  b) Si $g \circ f$ inyectiva entonces f inyectiva

  c) Si $g \circ f$ epiyectiva entonces g es epiyectiva

- **[Teorema de la inversa]**: Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$. Tenemos que f es biyectiva con inversa g si se satisfacen al menos 2 de las siguientes condiciones:

  - $g \circ f = id_A$
  - $f \circ g = id_B$
  - g es biyectiva

- **[Inversa de a composición]**: Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$