Pauta Aux #5

P1)

(a) Demostremos que sí lo es:

Sea $n \in \mathbb{N}$. Basta tomar $x = 2n$ (que está en $\mathbb{N}$, pues $2, n \in \mathbb{N}$) y se tiene que

$$f(x) = f(2n)$$
$$= \frac{2n}{2} \quad / \text{ pues } 2n \text{ es par}$$
$$= n$$

$\Rightarrow$ f es sobreyectiva

(b) $f(1) = 4$

$f(8) = 4$

$\Rightarrow$ $f(1) = f(8)$ y como $1 \neq 8$

se tiene que f no es inyectiva.

P3

(a) Sea $Z \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Basta tomar

$$(X, Y) = (Z \cap A, Z \cap B)$$

(que se tiene que $\in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, pues $Z \cap A \subseteq A \wedge Z \cap B \subseteq B$)

y se obtiene

$$\begin{aligned} g((X,Y)) &= X \cup Y \\ &= (Z \cap A) \cup (Z \cap B) \\ &= Z \cap (A \cap B) \\ &= Z \quad / \text{pues } Z \subseteq A \cap B \end{aligned}$$

$\blacksquare$

(b) $\Rightarrow$) Si $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{x} \in A \cap B$

$\Rightarrow \bar{x} \in A \wedge \bar{x} \in B$

$\Rightarrow \{\bar{x}\} \in \mathcal{P}(A) \wedge \{\bar{x}\} \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow (\{\bar{x}\}, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$(\emptyset, \{\bar{x}\}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Se tiene que $(\{\bar{x}\}, \emptyset) \neq (\emptyset, \{\bar{x}\})$

y que

$$g((\{\bar{x}\},\emptyset)) = \{\bar{x}\} \cup \emptyset$$
$$= \{\bar{x}\}$$
$$= \emptyset \cup \{\bar{x}\}$$
$$= g((\emptyset,\{\bar{x}\}))$$

$\Rightarrow$ g no inyectiva $\rightarrow\leftarrow$ pues g es iny por hipótesis

$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$

$\Leftarrow$) Sea $(X,Y),(W,Z) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ tq

$$g((X,Y)) = g((W,Z))$$

$$\Rightarrow X \cup Y = W \cup Z \quad / \cap A$$

$$(X \cup Y) \cap A = (W \cup Z) \cap A$$

$$\Rightarrow (X \cap A) \cup (Y \cap A) = (W \cap A) \cup (Z \cap A)$$

$X \cap A = X$ pues $X \subseteq A$

$Y \cap A = \emptyset$ pues $Y \cap A \subseteq B \cap A = \emptyset$

Análogamente $W \cap A = W$

$Z \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \quad X = W$

Luego, teníamos

$X \cup Y = W \cup Z \quad / \cap B$

y se aplica el mismo procedimiento, para llegar a que

$Y = Z$

$\Rightarrow \quad (X, Y) = (W, Z)$

$\Rightarrow \quad g$ inyectiva $\blacksquare$

P4) Sea $A \subseteq \mathcal{U}$

(a) Iny. Sea $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tq

$\delta_A(X) = \delta_A(Y)$

$\Rightarrow \quad A \Delta X = A \Delta Y \quad / A \Delta$

$\Rightarrow \quad \underbrace{A \Delta A}_{\emptyset} \Delta X = \underbrace{A \Delta A}_{\emptyset} \Delta Y$

$\Rightarrow \quad X = Y$

//

Epi Sea $Y \in P(\mathcal{U})$. Basta tomar

$$X = A \triangle Y \quad (\in P(\mathcal{U})) \text{ y se tiene}$$

$$\delta_A(X) = A \triangle X$$

$$= \underbrace{A \triangle A}_{\emptyset} \triangle Y = Y \quad //$$

$\Rightarrow \delta_A$ es biyectiva ■

(b) $\overset{\text{pdq}}{\theta_A}$ iny $\Leftrightarrow A = \mathcal{U} \Leftrightarrow \theta_A$ epiyectiva

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (ii): Probemos la contrarecíproca:

Si $A \neq \mathcal{U} \Rightarrow A \subsetneq \mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathcal{U}$ tq $x \notin A$

Luego, $\theta_A(\{x\}) = A \cap \{x\} = \emptyset$ (pues $x \notin A$)

$$\theta_A(\emptyset) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$\Rightarrow \theta_A(\emptyset) = \theta_A(\{x\})$ y $\{x\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \theta_A$ no es inyectiva

//

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sea $X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tq

$$\theta_A(X) = \theta_A(Y)$$

$\Rightarrow X \cap A = Y \cap A$

$\Rightarrow X \cap \mathcal{U} = Y \cap \mathcal{U}$ / pues $A = \mathcal{U}$

$\Rightarrow X = Y$ / pues $X, Y \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow \theta_A$ es inyectiva //

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Sea $Y \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Basta tomar $X = Y$ y se tiene que

$$\theta_A(X) = A \cap X \underset{X=Y}{=} A \cap Y \underset{A=\mathcal{U}}{=} \mathcal{U} \cap Y \underset{Y \subseteq \mathcal{U}}{=} Y$$

$\Rightarrow \theta_A$ es epiyectiva //

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Probemos la contrarrecíproca

Si $A \neq \mathcal{U} \Rightarrow A \subsetneq \mathcal{U}$

$\Rightarrow \exists\, x \in \mathcal{U}$ tq $x \notin A$

Luego, notamos que

$$\theta_A(X) = A \cap X \subseteq A \quad \forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$$

y como $x \notin A \Rightarrow \{x\} \not\subseteq A$

$\Rightarrow \theta_A(X) \neq \{x\} \quad \forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$

$\Rightarrow \theta_A$ no es epiyectiva $\blacksquare$

P5

$h = g \circ f$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ es biyectiva

$\Rightarrow$ En particular, $g \circ f$ es sobreyectiva

$\Rightarrow$ g es sobreyectiva

Como g es inyectiva por hipótesis, se tiene que g es biyectiva

Luego,

$h = g \circ f \; / \; g^{-1} \circ$

$g^{-1} \circ h = g^{-1} \circ g \circ f = f$

Como g^{-1} es biyectiva y h es biyectiva por hipótesis

$\Rightarrow$ f es biyectiva por ser composición de biyectivas. $\blacksquare$

Finalmente,

$f = g^{-1} \circ h$

$\Rightarrow f^{-1} = (g^{-1} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = h^{-1} \circ g$ //