

PAUTA Aux 5

P11

(a) $\Rightarrow$ Sea $X \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X \subseteq A$ y por hipótesis ($A \subseteq B$) se tiene $X \subseteq B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)$

$\Leftarrow$ Sea $x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ y por hipótesis $\{x\} \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$ ■

(b) $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

¿Qué paso cambia si reemplazo $\cap$ por $\cup$?

(c) Por contradicción, si $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$ se tiene que

$\exists a \in A$ tq $a \notin B$ y $\exists b \in B$ tq $b \notin A$. Consideremos el conjunto $\{a, b\}$, como $a \in A \Rightarrow a \in A \cup B$ y $b \in B \Rightarrow b \in A \cup B$

$\Rightarrow \{a, b\} \subseteq A \cup B \Rightarrow \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, por hipótesis entonces

$\{a, b\} \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow \{a, b\} \in \mathcal{P}(A) \vee \{a, b\} \in \mathcal{P}(B)$

$\Rightarrow \{a, b\} \subseteq A \vee \{a, b\} \subseteq B$

Como $b \notin A \Rightarrow \{a, b\} \not\subseteq A$ y como $a \notin B \Rightarrow \{a, b\} \not\subseteq B \rightarrow \leftarrow$

Luego $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ ■

PAUTA AUX #4

P1

(a) Demostremos por doble inclusión

$\subseteq$

$$\text{Sea } (x, y) \in (E \setminus A) \times F$$

$$\Rightarrow x \in E \setminus A \wedge y \in F$$

$$\text{En particular } x \in E \Rightarrow (x, y) \in E \times F$$

$$\text{Además, } x \notin A \Rightarrow (x, y) \notin A \times F$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (E \times F) \setminus (A \times F)$$

$$\therefore (E \setminus A) \times F \subseteq (E \times F) \setminus (A \times F)$$

$\supseteq$ Sea $(x, y) \in (E \times F) \setminus (A \times F)$

$$\Rightarrow (x, y) \in E \times F \Rightarrow x \in E \wedge y \in F$$

$$\text{También } (x, y) \notin (A \times F) \Rightarrow x \notin A \vee y \notin F$$

Pero $y \in F$, así que la única posibilidad es

$$\text{que } x \notin A \Rightarrow x \in E \setminus A, y \in F$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (E \setminus A) \times F \quad \therefore (E \times F) \setminus (A \times F) \subseteq (E \setminus A) \times F$$

(b)

$$\text{Sea } (x, y) \in (A \setminus B) \times (C \setminus D)$$

$$\Rightarrow x \in A \setminus B \wedge y \in C \setminus D$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge y \in C \Rightarrow (x, y) \in A \times C$$

$$\text{Tambi\u00e9n } x \notin B \wedge y \notin D \Rightarrow (x, y) \notin B \times D$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times D)$$

$$A = \{1, 2\}$$

$$C = \{1, 2\}$$

$$B = \{1\}$$

$$D = \{2\}$$

$$A \times C = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$B \times D = \{(1, 2)\}$$

$$\Rightarrow (A \times C) \setminus (B \times D) = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$\text{Por otro lado, } A \setminus B = \{2\} \quad C \setminus D = \{1\}$$

$$\Rightarrow (A \setminus B) \times (C \setminus D) = \{(2, 1)\}$$

$\therefore$ no se tiene la igualdad.



$$(c) \quad A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D$$

Tomamos $a \in A$ (existe, pues $A \neq \emptyset$)

Demostremos $C = D$ por doble inclusión:

$$\underline{\subseteq} \mid \text{ Sea } x \in C$$

$$\Rightarrow (a, x) \in A \times C$$

$$\Rightarrow (a, x) \in A \times D \quad (\text{por hipótesis})$$

$$\Rightarrow x \in D \quad \therefore C \subseteq D$$

$$\underline{\supseteq} \mid \text{ Sea } x \in D$$

$$\Rightarrow (a, x) \in A \times D$$

$$\Rightarrow (a, x) \in A \times C \quad (\text{por hipótesis})$$

$$\Rightarrow x \in C \quad \therefore D \subseteq C$$

$$\therefore C = D$$



Punto auxiliar 4

P3]

- a)
- $\mathcal{C}$ partición de B
 - $A \subseteq B$
 - $\mathcal{C}_A := \{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}, C \cap A \neq \emptyset\}$

P.D.Q. $\mathcal{C}_A$ es partición de A

En efecto: Debemos comprobar:

(i) $\forall X \in \mathcal{C}_A, X \neq \emptyset$

En efecto: $\because X \in \mathcal{C}_A \Rightarrow \exists C \in \mathcal{C}, X = C \cap A$, con $C \cap A \neq \emptyset$
 $\Rightarrow X \neq \emptyset$

(ii) $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{C}_A, \because X_1 \neq X_2$ entonces $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

En efecto: $\because X_1, X_2 \in \mathcal{C}_A$, entonces:

$$\begin{cases} \exists C_1 \in \mathcal{C}, X_1 = A \cap C_1 & (\text{con } A \cap C_1 \neq \emptyset) \\ \exists C_2 \in \mathcal{C}, X_2 = A \cap C_2 & (\text{con } A \cap C_2 \neq \emptyset) \end{cases}$$

$$\text{Así: } X_1 \cap X_2 = (A \cap C_1) \cap (A \cap C_2) \\ = A \cap C_1 \cap C_2$$

| asociando, conmutando,
| usando $A \cap A = A$

Pero $C_1 \cap C_2 = \emptyset$! pues $C_1 \neq C_2$ (e caso que $X_1 \neq X_2$)

y $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, y como $\mathcal{C}$ es partición: $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

$$\text{Luego } X_1 \cap X_2 = A \cap C_1 \cap C_2 = A \cap \emptyset = \emptyset //$$

(ii) C_A cubre A : $\bigcup_{X \in C_A} X = A$

En efecto: $\bigcup_{X \in C_A} X = \bigcup_{C \in C} A \cap C$ | Def. de C_A

$= \left(\bigcup_{C \in C} C \right) \cap A$ | Usando que la $\cap$ distribuye c/p al $\cup$
 $= B$!
 por C cubre B

$= B \cap A = A$
 ↓
 por $A \in B$

$\therefore$ Tenemos que $\bigcup_{X \in C_A} X = A$

finalmente, C_A es partición de A

b) $L_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n \}$ con $n \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L} = \{ L_n \mid n \in \mathbb{R} \}$

P.D.Q. $\mathcal{L}$ es cubrimiento de $\mathbb{R}^2$

En efecto: Hay que ver las 3 propiedades:

i) $\forall A \in \mathcal{C}, A \neq \emptyset$, en efecto: $\forall n \in \mathbb{R}, (0, n) \in L_n$

$\therefore L_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{R}$

$\therefore \forall A \in \mathcal{C}, A \neq \emptyset$

$$(ii) \quad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{C}, A_1 \neq A_2, A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

En efecto: Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$ (o sea $L_{n_1} \in \mathcal{C}$ y $L_{n_2} \in \mathcal{C}$)

Con $n_1 \neq n_2$. Veamos que $L_{n_1} \cap L_{n_2} = \emptyset$.

En efecto:

Opción 1: $L_{n_1} \cap L_{n_2} = \emptyset$ pues son rectas paralelas que pasan por $\neq$'s puntos

Opción 2: Sea $(x, y) \in L_{n_1} \cap L_{n_2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + n_1 \\ y = x + n_2 \end{cases}$$

luego $x + n_1 = y = x + n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$

pero $n_1 \neq n_2$ $\frac{\text{''''}}{\text{''''}} \therefore L_{n_1} \cap L_{n_2} = \emptyset$

$$(ii) \quad \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \mathbb{R}^2$$

En efecto: $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcup_{n \in \mathbb{R}} L_n$, evidentemente

$$\bigcup_{n \in \mathbb{R}} L_n \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (\text{pues } \mathbb{R}^2 \text{ es el conjunto referencia})$$

Veamos que $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{R}} L_n$. Sea $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$

definimos $\bar{n} = \bar{y} - \bar{x}$, luego $(\bar{x}, \bar{y}) \in L_{\bar{n}}$

en efecto: $\bar{y} = \bar{y} - \bar{x} + \bar{x} = \bar{n} + \bar{x} \therefore (\bar{x}, \bar{y}) \in L_{\bar{n}}$

y como $\bar{n} \in \mathbb{R} \Rightarrow L_{\bar{n}} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{R}} L_n \therefore (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcup_{n \in \mathbb{R}} L_n$

luego $\mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{R}} L_n$, así por doble inclusión:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{R}} L_n$$

$\therefore \mathcal{C}$ es partición de $\mathbb{R}^2$

c) Debemos encontrar una partición de $\Pi_+ = \{(x, y) \mid y > 0\}$

Nota que $\Pi_+ \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{C}$ es partición de $\mathbb{R}^2$,
luego usando la parte a), tenemos que:

$$\mathcal{C}_{\Pi_+} := \{C \cap \Pi_+ \mid C \in \mathcal{C}\}$$

es partición de Π_+

Observación: Recuerda, que $\mathcal{P}(\Pi_+)$ y $\mathcal{d}(\Pi_+)$ siempre
son particiones de Π_+