P1. *Conjunto Potencia:* Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que:

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Empezamos a las 14:30!

$$P(A) = \{X \subseteq E \,/\, X \subseteq A\}$$

Por doble implicancia:

$\Rightarrow)$ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

Sea $X \in P(A)$ arbitrario.

$X \in P(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$ y como $A \subseteq B$

$\Rightarrow X \subseteq B$

$\Leftrightarrow X \in P(B)$

Luego $\forall X \in P(A) \Rightarrow X \in P(B)$

$\Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

$\Leftarrow)$ $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

Sea $a \in A \Leftrightarrow \{a\} \subseteq A$

$\{a\} \subseteq A$ $\Leftrightarrow \{a\} \in P(A)$ / $P(A) \subseteq P(B)$

$x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$

$a \in \{a\}$ $\Rightarrow \{a\} \in P(B)$

$\Rightarrow a \in A$

$\Leftrightarrow \{a\} \subseteq B$

$\Leftrightarrow a \in B$

Como a era arbitrario:

$\forall a \in E,\ a \in A \Rightarrow a \in B$

$\Leftrightarrow A \subseteq B$ $\square$.

(b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

$$X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$$

$$\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \wedge X \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B)$$

Llegamos a $X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \in P(A) \cap P(B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

definición de $A \cap B$.

$$\boxed{X \in A \wedge X \in B \Leftrightarrow X \in A \cap B.}$$

(c) Si $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$, entonces $A \subseteq B \vee B \subseteq A$

$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

F.

$\Rightarrow$ Por contradicción, supongamos $A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A$

$$\boxed{A \not\subseteq B \Rightarrow \exists a \in A,\ a \notin B, \quad B \not\subseteq A \Rightarrow \exists b \in B : b \notin A}$$

Consideremos el conjunto $\{a, b\}$

Como $a \in A \Rightarrow a \in A \cup B$ y $b \in B \Rightarrow b \in A \cup B$

$$\Rightarrow \{a, b\} \subseteq A \cup B$$

$$\Leftrightarrow \{a, b\} \in P(A \cup B) \overset{\text{HIPÓTESIS}}{=} P(A) \cup P(B)$$

Por hipótesis $\Rightarrow \{a, b\} \in P(A) \cup P(B)$

$$\Leftrightarrow \{a, b\} \in P(A) \vee \{a, b\} \in P(B)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\{a, b\} \subseteq A \vee \{a, b\} \subseteq B},$$

Pero

$$a \notin B \Rightarrow \{a, b\} \not\subseteq B$$

$$b \notin A \Rightarrow \{a, b\} \not\subseteq A$$

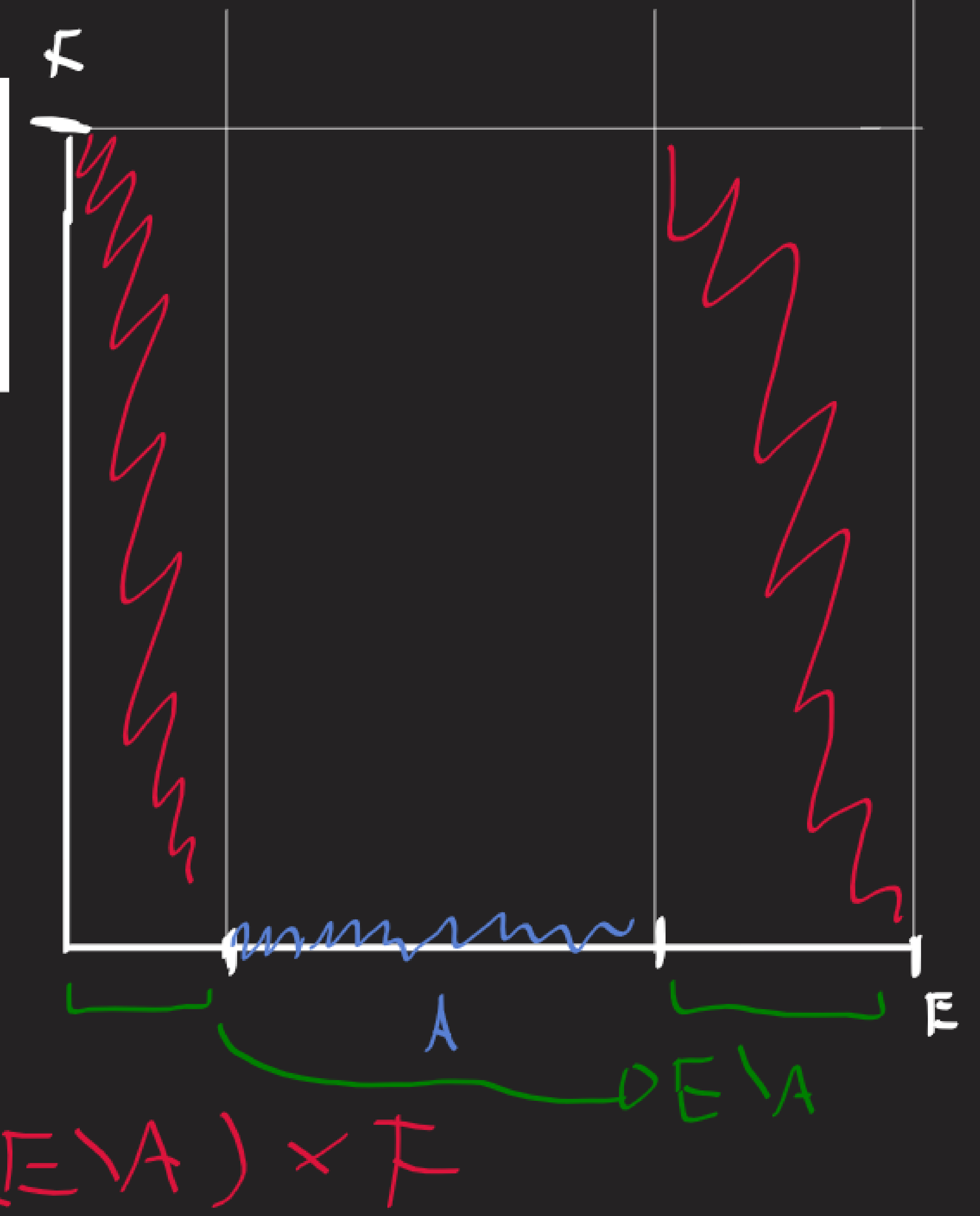
$\Leftrightarrow$ F.

$\therefore$ no se tiene $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \wedge (A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq A)$

$\Leftrightarrow$ se tiene $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B) \Rightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A$.

P2. ***Producto Cartesiano:*** Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$.

(a) Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.



Por doble inclusión:

$\subseteq$] Sea $(x,y) \in (E \setminus A) \times F$

$\Leftrightarrow x \in E \setminus A \wedge y \overset{a}{\in} F.$

En particular: $x \overset{b}{\in} E \Rightarrow (x,y) \overset{a\,y\,b}{\in} E \times F$ (1)

Por otro lado (Recordando que $E \setminus A = A^c$)

$x \in E \setminus A \Leftrightarrow x \notin A \Rightarrow (x,y) \notin A \times F$ (2)

(si $(x,y) \in A \times F$,

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in F$)

F.

(1) y (2): $(x,y) \in E \times F \wedge (x,y) \notin A \times F$

$\Leftrightarrow (x,y) \in E \times F \cap (A \times F)^c$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (E \times F) \setminus (A \times F)$.

$\supseteq$] $(x,y) \in (E \times F) \setminus (A \times F)$

$\Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in E \times F \Rightarrow x \in E \wedge y \in F \\ (x,y) \notin A \times F \Rightarrow x \notin A \vee y \notin F \text{ pero } y \in F. \Rightarrow x \notin A. \end{cases}$

$x \in E \wedge y \overset{(1)}{\in} F$.

$x \notin A \vee y \notin F \Rightarrow x \notin A$

Falso

$\Leftrightarrow x \in E \setminus A$ (2)

(1) y (2) $\Rightarrow (x, y) \in (E \setminus A) \times F$.

Por doble inclusión $\Rightarrow (E \times F) \setminus (A \times F) = (E \setminus A) \times F$.

$A \subseteq B \iff \forall x \in E, \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$

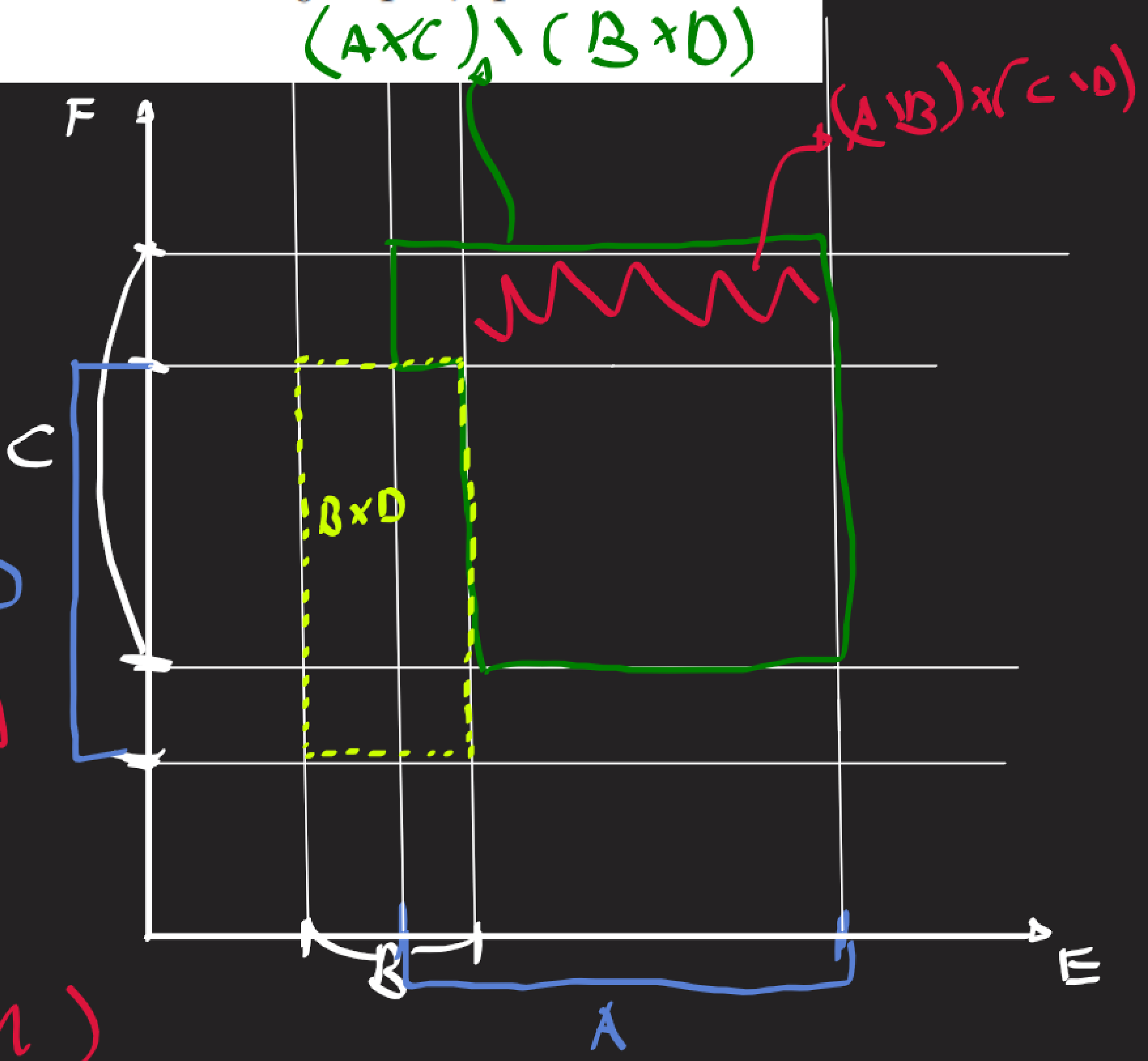
1. tomar $x \in A$ arbitrario
2. Llegué a que $x \in B$.
3. Como $x \in A$ era arbitrario, se cumple $\forall x \in A$.

Luego $\forall x \in A, \quad x \in B$

$\iff \forall x \in E, \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

$\iff \quad A \subseteq B.$

(b) Pruebe que $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. Muestre, con un contraejemplo, que no se tiene la igualdad.



$\subseteq$] Sea $(x,y)\in(A\setminus B)\times(C\setminus D)$

$\Leftrightarrow \; x\in A\setminus B \wedge y\in C\setminus D$

$\boxed{\Leftrightarrow \; x\in A \wedge x\notin B \wedge y\in C \wedge y\notin D}$

En particular $\Rightarrow \; x\in A \wedge y\in C$.

$\rightarrow (x,y)\in A\times C$ (1)

Por otra parte, también tenemos

$\Rightarrow x\notin B \wedge y\notin D \Rightarrow (x,y)\notin B\times D$ (2)

de (1) y (2)

$\Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$.

$(x,y)\in A\times C \wedge (x,y)\notin B\times D$
$\Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)^c$
$\Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$

Como (x,y) arbitrario $\Rightarrow (A\setminus B)\times(C\setminus D)\subseteq(A\times C)\setminus(B\times D)$.

$B\times D := \{(x,y) : x\in B, y\in D\}$

$\not\supseteq$] Contraejemplo

$A=\{1,2\}$, $C=\{1,2\}$

$B=\{1\}$, $D=\{2\}$

$A\times C = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$B\times D = \{(1,2)\} \Rightarrow (A\times C)\setminus(B\times D) = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$

$(A \times C) \setminus (B \times D) = \{(1,1), (2,2), (2,1)\}$

$(A \setminus B) = \{2\}$ U| $\cancel{A|}$

$(C \setminus D) = \{1\}$

$(A \setminus B) \times (C \setminus D) = \{(2,1)\}$.

(c) Pruebe que $A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \implies C = D$.

Propuesto ¡¡

(a) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto B. Sea $A \subseteq B$ subconjunto, se define $\mathcal{C}_A := \{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}, C \cap A \neq \emptyset\}$. Pruebe que $\mathcal{C}_A$ es una partición de A.

$\mathcal{C}$ partición de $B \iff \begin{cases} (1)\ \forall X \in \mathcal{C},\ X \neq \emptyset \\ (2)\ \forall X_1, X_2 \in \mathcal{C},\ X_1 \neq X_2 \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ (3)\ \mathcal{C} \text{ cubre a } B: \\ \quad \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X = B. \end{cases}$

$\mathcal{C} \subseteq P(B)$

$A \subseteq B$,

$\mathcal{C}_A := \{X \cap A \mid X \in \mathcal{C},\ X \cap A \neq \emptyset\}$

Pruebe que $\mathcal{C}_A$ partición de A.

(1) $\forall X \in \mathcal{C}_A,\ X \neq \emptyset$.

En efecto, sea $X \in \mathcal{C}_A \Rightarrow \exists Y \in \mathcal{C},\ Y \cap A = X$

y además $\underline{Y \cap A \neq \emptyset}$

$X \neq \emptyset$.

Como X arb. se cumple $\forall X \in \mathcal{C}_A$.

(2) $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{C}_A,\ X_1 \neq X_2 \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Sean $X_1, X_2 \in \mathcal{C}_A$ distintos

$\Rightarrow \begin{cases} \exists C_1 \in \mathcal{C}: X_1 = A \cap C_1 \\ \exists C_2 \in \mathcal{C}: X_2 = A \cap C_2 \end{cases}$ y $C_1 \neq C_2$

Luego $X_1 \cap X_2 = (A \cap C_1) \cap (A \cap C_2) = A \cap C_1 \cap C_2$

Como $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ partición y $C_1 \neq C_2$,

$$\Rightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

Luego $X_1 \cap X_2 = A \cap C_1 \cap C_2$
$= A \cap \emptyset = \emptyset$ $\square$.

Como X_1, X_2 eran arb, se cumple $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{C}_A, X_1 \neq X_2$

③ $\mathcal{C}_A$ cubre A: $\bigcup_{X \in \mathcal{C}_A} X = A$.

$X \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow X = C \cap A$, con $C \in \mathcal{C}$ y $C \cap A \neq \emptyset$

$$\bigcup_{X \in \mathcal{C}_A} X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} A \cap C$$

/ $\cap$ distribuye sobre $\cup$

$(A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \cdots$

$= A \cap (C_1 \cup C_2 \cup \cdots)$

$$= \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap A$$

Como $\mathcal{C}$ es partición de B, $\mathcal{C}$ cubre B:

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = B.$$

Luego $= B \cap A$ / $A \subseteq B$

$= A$.

Lo se tiene ③.

Luego $\mathcal{C}_A$ es partición de A.

(b) Dado $n \in \mathbb{R}$ define el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^2$:

$$L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n\}$$

(0, n)

Pruebe que $\mathcal{C} = \{L_n \mid n \in \mathbb{R}\}$ es partición del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).