

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo R. Dartnell R.

Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras



Auxiliar 4 - Conjuntos II

23 de abril de 2021

Resumen

- **[Diferencia Simétrica]:** Sean A y B conjuntos, se define:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- **[Propiedades de inclusión]:** Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos:

a) $\emptyset \subseteq A \subseteq E$

b) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$

- **[Propiedades de igualdad]:** Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos:

a) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

b) $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$

c) $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$

d) *Ley de De Morgan*

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- **[Equivalencias útiles]:** Son equivalentes:

i) $A \subseteq B$

ii) $B^c \subseteq A^c$

iii) $A \cap B^c = \emptyset$

iv) $B \cup A^c = E$

- **[Producto Cartesiano]:** Para $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ se define el conjunto $A \times B$ como: $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

- **[Algunas propiedades]:** Si $A_1, A_2 \subseteq E$ y $B_1, B_2 \subseteq F$ entonces:

1. $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times B_1 = \emptyset$

2. $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2 \implies A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$

3. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

4. $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$

- **[Conjunto potencia]:** Se define el conjunto potencia (o también llamado conjunto de las partes) $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de todos los subconjuntos de A :

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

Obs. : $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$ siempre.

- **[Unión e intersección de Conjuntos potencia]:**

1. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

2. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

- **[Partición de conjuntos]:** Llamaremos a $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$ partición de A si se cumple:

- $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$

- $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ si $C_1 \neq C_2$, entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

- $\mathcal{C}$ cubre A : $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

P1. Conjunto Potencia: Sean $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Demuestre que:

(a) $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

(b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(c) Si $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$, entonces $A \subseteq B \vee B \subseteq A$

P2. Producto Cartesiano: Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$.

- Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.
- Pruebe que $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. Muestre, con un contraejemplo, que no se tiene la igualdad.
- Pruebe que $A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \implies C = D$.

P3. Particiones:

- Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto B . Sea $A \subseteq B$ subconjunto, se define $\mathcal{C}_A := \{C \cap A \mid C \in \mathcal{C}, C \cap A \neq \emptyset\}$. Pruebe que $\mathcal{C}_A$ es una partición de A .
- Dado $n \in \mathbb{R}$ define el siguiente conjunto en $\mathbb{R}^2$:

$$L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + n\}$$

Pruebe que $\mathcal{C} = \{L_n \mid n \in \mathbb{R}\}$ es partición del plano cartesiano ($\mathbb{R}^2$).

- Encuentre una partición para la mitad superior del plano cartesiano, es decir para:

$$\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

P4. Diferencia Simétrica: (Propuesto) Sean A, B y C tres conjuntos. Analice el valor de verdad de las siguientes igualdades. Las que sean verdaderas, demuéstrelas y para las que sean falsas, entregue un contraejemplo.

- $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$
- $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Indicación: puede empezar haciendo un diagrama de Venn de los conjuntos involucrados para poder intuir cuáles igualdades son verdaderas.

