Pauta Aux #3

P1)

(a) Desarrollemos ambos lados para llegar a lo mismo:

Lado izquierdo:

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

$$= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c \quad \text{/ def. de resta}$$

$$= A \cap B \cap (A^c \cup C^c) \quad \text{/ De Morgan}$$

$$= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \quad \text{/ distrib.}$$

$$= (\underbrace{\underbrace{A \cap A^c}_{\emptyset} \cap B}_{\emptyset}) \cup (A \cap B \cap C^c) \quad \text{/ conm}$$

$$(\emptyset \cap B)$$

$$\emptyset \cup (A \cap B \cap C^c)$$

$$= A \cap B \cap C^c$$

Lado Derecho:

$(A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$

$= (A \cap B) \cap (A^c \cup C)^c$ / def resta

$= (A \cap B) \cap ((A^c)^c \cap C^c)$ / De Morgan

$= (A \cap B) \cap (A \cap C^c)$ / doble complemento

$= A \cap B \cap A \cap C^c$ / asociatividad

$= A \cap A \cap B \cap C^c$ / conm.

$= A \cap B \cap C^c$ / idempotencia.

$\therefore$ el lado izq = lado derecho ■

(b) Hip: $A \cap B \subseteq C$ pdq $A \cap C^c \subseteq B^c$

Demostremos que $A \cap C^c \subseteq B^c$:

En efecto, sea $x \in A \cap C^c$

$\iff x \in A \wedge x \in C^c$

Ahora, suponemos por contradicción que $x \in B$.

Luego,

$x \in A \wedge x \in B \iff x \in A \cap B$

$\implies x \in C$ / Hipótesis $(A \cap B \subseteq C)$

Entonces,

$x \in C \wedge x \in C^c \longrightarrow\!\longleftarrow$

$\therefore\ x \in B^c$ y así

$A \cap C^c \subseteq B^c$ ∎

(c) Otra manera de demostrar las cosas:

$A \subseteq B$

$\iff \forall x \in \mathcal{U} \quad x \in A \implies x \in B$ / def $\subseteq$

$\iff \forall x \in \mathcal{U} \quad \overline{x \in A} \vee x \in B$ / caract. implica

$\iff \forall x \in \mathcal{U} \quad x \notin A \vee x \in B$

$\iff \forall x \in \mathcal{U} \quad x \in A^c \vee x \in B$

$\iff \forall x \in \mathcal{U} \quad x \in A^c \cup B$

$\iff \forall x \in \mathcal{U} \quad x \notin (A^c \cup B)^c$

$\iff \forall x \in \mathcal{U} \quad x \notin A \cap B^c$ / de Morgan

$\iff A \cap B^c = \emptyset$

P2

En efecto, sea $X, Y \subseteq \mathcal{U}$ tq

$X \cup A = Y \cup A$, $X \cap A = Y \cap A$

Entonces,

$$(X \cup A) \setminus (X \cap A) = (Y \cup A) \setminus (Y \cap A)$$

$$\Rightarrow \quad X \triangle A = Y \triangle A \quad / \triangle A$$

$$\Rightarrow (X \triangle A) \triangle A = (Y \triangle A) \triangle A$$

$$\Rightarrow \quad X \triangle \emptyset = Y \triangle \emptyset \quad / \triangle \text{ asocia}$$

$$\Rightarrow \quad X = Y \quad / \emptyset \text{ es neutro para } \triangle$$

$\blacksquare$

P3

(a) $C(B) = \begin{cases} B \setminus B & \text{si } A \cap B \neq \emptyset \\ B \cup B & \text{si } A \cap B = \emptyset \end{cases}$

$\Rightarrow \quad C(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A \cap B \neq \emptyset \\ B & \text{si } A \cap B = \emptyset \end{cases}$

Entonces,

$$C(B) \in \{\emptyset, B\}$$

(b)

$C(A) = \begin{cases} A \setminus B & \text{si } A \cap A \neq \emptyset \\ A \cup B & \text{si } A \cap A = \emptyset \end{cases}$

Sabemos que $A \cap A = A \neq \emptyset$
↓
enunciado

Entonces, $C(A) = A \setminus B$

Por otro lado,

$C(A^c) = \begin{cases} A^c \setminus B & \text{si } A \cap A^c \neq \emptyset \\ A^c \cup B & \text{si } A \cap A^c = \emptyset \end{cases}$

Pero, claramente, $A^c \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \quad C(A^c) = A^c \cup B$

$$= (A \cap B^c)^c \quad \text{/ De Morgan}$$

$$= (A \setminus B)^c \quad \text{/ def resta}$$

$$= (C(A))^c \quad \blacksquare$$

(c)

$$C(X \cap Y) = \begin{cases} (X \cap Y) \setminus B & \text{si } (X \cap Y) \cap A \neq \emptyset \\ (X \cap Y) \cup B & \text{si } (X \cap Y) \cap A = \emptyset \end{cases}$$

Por enunciado, se tiene que

$X \cap Y \cap A \neq \emptyset$. Entonces,

$C(X \cap Y) = (X \cap Y) \setminus B$

Además,

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & \text{si } A \cap X \neq \emptyset \\ X \cup B & \text{si } A \cap X = \emptyset \end{cases}$$

Por contradicción, si $A \cap X = \emptyset$

$$\Rightarrow A \cap X \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$$

$$\rightarrow\leftarrow$$

Entonces, $A \cap X \neq \emptyset$

$\therefore \quad C(X) = X \setminus B$

Análogamente

$$C(Y) = Y \setminus B$$

Entonces,

$C(X) \cap C(Y)$

$= (X \setminus B) \cap (Y \setminus B)$

$= (X \cap B^c) \cap (Y \cap B^c)$ / def resta

$= X \cap B^c \cap Y \cap B^c$ / $\cap$ asocia

$= X \cap Y \cap B^c \cap B^c$ / $\cap$ conmuta

$= (X \cap Y) \cap B^c$ / $\cap$ asocia y idempotencia

$= (X \cap Y) \setminus B$ / def resta

$= C(X \cap Y)$

P4) PROPUESTO!!