Pauta Auxiliar #2

P1) (a)

En efecto, si tomamos $n=1$ se tiene que

$P(1) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$

$\Leftrightarrow P(1) \vee \overline{P(1)} \vee P(0)$ / $\vee$ conmuta

$\Leftrightarrow V \vee P(0)$ / tercer excluso

$\Leftrightarrow V$ / $V \vee p \Leftrightarrow V$

Por lo que encontramos un $n \in \mathbb{N}$ que hace verdadera la proposición ∎

(b) Técnica para demostrar una proposición de la forma $p \vee q$:

Caso 1: $p \Leftrightarrow V$ con lo que $p \vee q \Leftrightarrow V$

Caso 2: $p \Leftrightarrow F$ con lo que hay que demostrar que $q \Leftrightarrow V$.

Entonces, para el problema tenemos que demostrar

$$\underbrace{\left(\forall n \in \mathbb{N} \ P(n) \Rightarrow P(1)\right)}_{p} \vee \underbrace{\overline{P(1)}}_{q}$$

Caso 1: $\overline{P(1)} \Leftrightarrow V$ con lo que se tiene la proposición.

Caso 2: $\overline{P(1)} \Leftrightarrow F$, entonces $P(1) \Leftrightarrow V$

Ahora, hay que demostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ P(n) \Rightarrow P(1)$$

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario

$$(P(n) \Rightarrow P(1))$$

$$\Leftrightarrow (P(n) \Rightarrow V) \quad / \text{reemplazando}$$

$$\Leftrightarrow V$$

Por lo que se tiene la proposición ∎

(c) No necesariamente, si

$P(n) \iff n > 0$

Entonces, para $n = 0$:

$P(0) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$

$\iff F \vee F \vee \overline{V}$

$\iff F$

P2)

n representa la cantidad de términos de la suma, donde el k-ésimo término es de la forma $\dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}$

C.B. $n = 1$

Suma es solo el 1er término: $\dfrac{1}{1 \cdot 5} = \dfrac{1}{5}$

$$\frac{n}{4n+1} = \frac{1}{4 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{5}$$

con lo que se cumple el C.B. //

H.I. Sea $k \geq 1$ tq

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \text{---} + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1}$$

pdq

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \text{---} + \frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} = \frac{k+1}{4(k+1)+1}$$

En efecto, tomamos el lado izquierdo de lo que queremos demostrar:

$$\left[\frac{1}{1\cdot 5} + \text{---} + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}\right] + \frac{1}{(4k+4-3)(4k+4+1)}$$

$$\overset{H.I.}{=} \left[\frac{k}{4k+1}\right] + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$

$$= \frac{k(4k+5) + 1}{(4k+1)(4k+5)}$$

$$= \frac{4k^2 + 5k + 1}{(4k+1)(4k+5)}$$

$$= \frac{(\cancel{4k+1})(k+1)}{(\cancel{4k+1})(4k+5)}$$

$$= \frac{k+1}{4k+5} \quad \blacksquare$$

(b)

C.B. $n=1$

$$2^{2\cdot 1} - 3\cdot 1 - 1 = 2^2 - 3 - 1 = 0 = 9\cdot 0$$

Entonces $9 \mid 2^{2\cdot 1} - 3\cdot 1 - 1$

por lo que se cumple el C.B. //

H.I. Sea $k \geq 1$ t.q.

$$9 \mid 2^{2k} - 3k - 1$$

$$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} \text{ tq } 2^{2k} - 3k - 1 = 9p$$

pdq $9 \mid 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$

$$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} \text{ tq } 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1 = 9r$$

En efecto,

$$2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$$

$$= 2^{2k+2} \boxed{-3k} - 3 \boxed{-1}$$ me sirven para usar la H.I.

$$= 2^2 \cdot 2^{2k} - 3k - 1 - 3$$

$$= (3+1) 2^{2k} - 3k - 1 - 3$$

$$= 3 \cdot 2^{2k} + \left[2^{2k} - 3k - 1\right] - 3$$

$$\overset{H.I.}{=} 3 \cdot 2^{2k} + 9p - 3$$

$$= 3\left(2^{2k} - 1 + 3p\right)$$

$$2^{2k} - 3k - 1 = 9p \iff 2^{2k} - 1 = 9p + 3k$$

$$= 3\left(9p + 3k + 3p\right)$$

$$= 3 \cdot 3\left(3p + k + p\right)$$

$$= 9\left(4p + k\right)$$

Sea $r = 4p + k$, como $p, k \in \mathbb{Z}$ y gracias a que $\mathbb{Z}$ es cerrado para $+$ y $\cdot$, $r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 9 \mid 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$ $\blacksquare$

P3

(a) C.B. $n = 1$

$F(1) = 1$, $2^1 = 2 \Rightarrow F(1) < 2^1$

se cumple el C.B.

H.I. sea $k \geq 1$ tq $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$

$F(i) < 2^i$ (inducción fuerte)

pdq $F(k+1) < 2^{k+1}$

En efecto

$$
\begin{aligned}
F(k+1) &= F(k) + F(k-1) \\
&< 2^k + 2^{k-1} \quad / \text{ H.I.} \\
&< 2^k + 2^k \quad / \ 2^{k-1} < 2^k \\
&< 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

(b)

C.B. $n = 6$

$F(6) = 8$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} = 7{,}5\ldots$

$\Rightarrow F(6) > \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1}$ se cumple el C.B. //

H.I. Sea $k \geq 6$ tq $\forall i \in \{6, -, k\}$

$F(i) > \left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$

pdq $F(k+1) > \left(\frac{3}{2}\right)^{(k+1)-1}$

En efecto,

$$F(k+1) = F(k) + F(k-1)$$

$$> \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left[\frac{3}{2} + 1\right]$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot \frac{16}{9}$$

$$> \left(\frac{3}{2}\right)^k \quad \blacksquare$$

(c)

C.B. $n = 2$

$$F(2+1)F(2-1) - F(2)^2 = 2 \cdot 1 - 1^2$$
$$= 1$$
$$= (-1)^2$$

se cumple el C.B. //

H.I. Sea $k \geq 2$ tq $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$

$$F(i+1)F(i-1) - F(i)^2 = (-1)^i$$

pdq $F((k+1)+1)F((k+1)-1) - F(k+1)^2 = (-1)^{k+1}$

En efecto,

$$F(k+2)F(k) - F(k+1)^2$$

$$= \big(F(k+1) + F(k)\big)F(k) - F(k+1)^2$$

$$= F(k+1)F(k) + F(k)^2 - F(k+1)^2$$

$$= F(k+1)\big(F(k) - F(k+1)\big) + F(k)^2$$

$$F(k+1) = F(k) + F(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad F(k) - F(k+1) = -F(k-1)$$

$$= F(k+1)\big(-F(k-1)\big) + F(k)^2$$

$$= -\left[F(k+1)F(k-1) - F(k)^2\right]$$

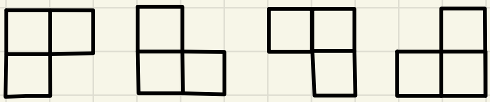
$$\underset{\text{H.I.}}{=} (-1)\cdot(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

■

P4

C.B. $n = 1$

Todos los tableros posibles son

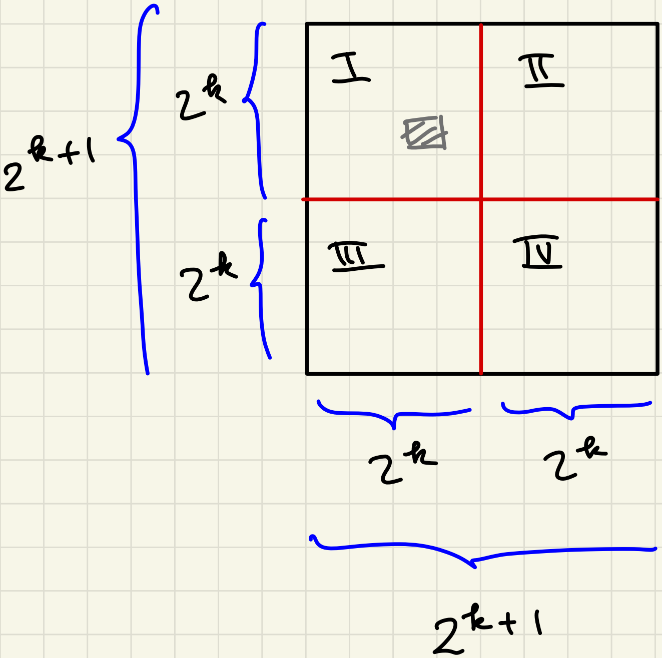


los cuales se teselan usando 1 trominó, por lo que el C.B. se cumple.

H.I. Sea $k \geq 1$ tq cualquier tablero de $2^k \times 2^k$ tq le falta 1 casilla, se puede teselar con trominós.

Pdq Cualquier tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ tq le falta 1 casilla, se puede teselar con trominós.

Sea un tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ tq le falta 1 casilla:



Las líneas rojas dividen al tablero en 4 tableros de $2^k \times 2^k$

Spg (sin pérdida de generalidad) digamos que la casilla faltante está en el tablero I.

Entonces, por H.I., se puede teselar el tablero I.

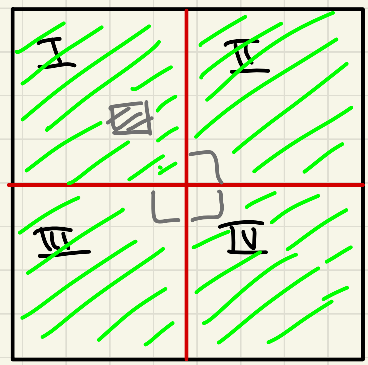
Luego, teselamos el resto de la siguiente manera:

El tablero II se tesela sin su casilla inferior izquierda

El tablero III se tesela sin su casilla superior derecha

El tablero IV se tesela sin su casilla superior izquierda

De manera que queda



Así, se aprecia que se puede cubrir el espacio que queda con un trominó, por lo que teselamos el tablero completo

∎