P1) $P(n)$ predicado con $\mathbb{N}$ conj. ref.

(a) $\exists n \in \mathbb{N} : P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$

$n=0$: $P(0) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$ / $p \vee p \Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow$ $P(0) \vee \overline{P(1)}$ → no se llega a nada

$n=1$: $P(1) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$ /

$\Leftrightarrow$ $P(1) \vee \overline{P(1)} \vee P(0)$ / $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow V$

$\Leftrightarrow$ $V \vee P(0)$ / $V \vee p \Leftrightarrow V$

$\Leftrightarrow$ V $\square$

$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \, (n=1)$ $P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$

(b) $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(1)) \vee \overline{P(1)}$

$(p \vee (\forall x \in E, Q(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E \;\; p \vee Q(x))$ (*)

$(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(1)) \vee \overline{P(1)}$ / Caract. Implica.

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \sim P(n) \vee P(1)) \vee \overline{P(1)}$ / (*)

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \sim P(n)) \vee P(1) \vee \overline{P(1)}$ / $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow V$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \sim P(n)) \vee V$ / $V \vee p \Leftrightarrow V$

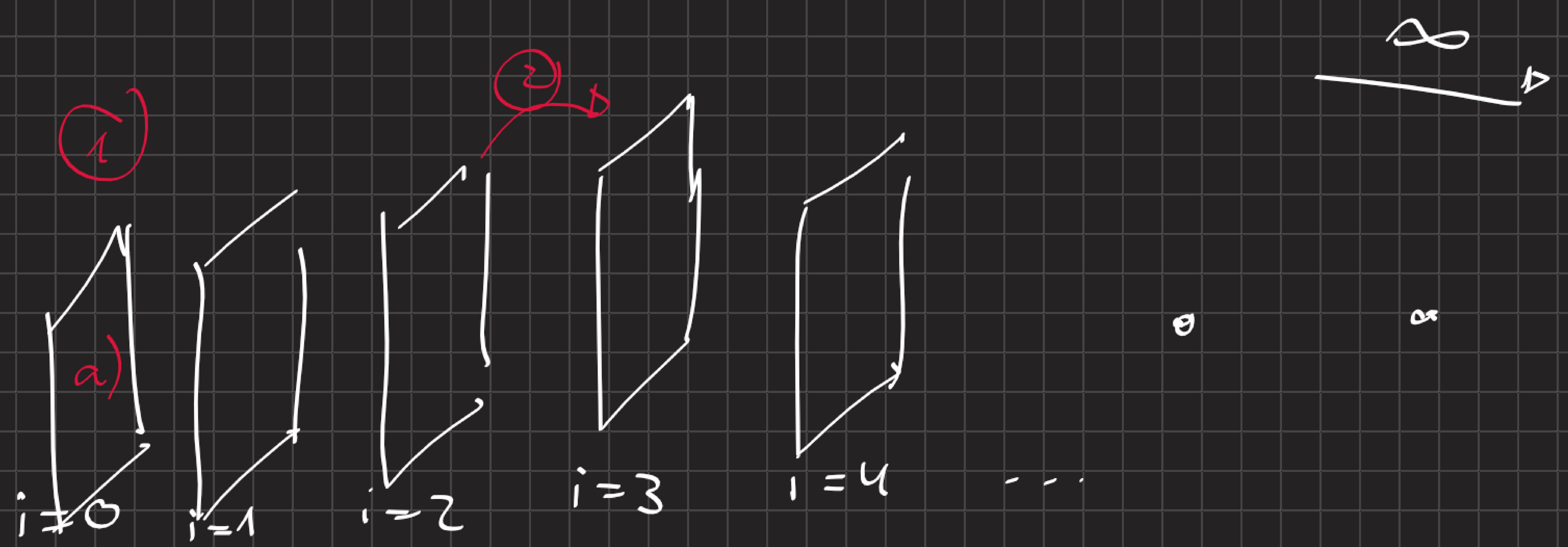
$\Leftrightarrow V$ $\square$

(c) ¿ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$ es cierta?

$n=2$: $P(2) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$ Debido a que no tenemos info. de P no se puede determinar el valor de verdad para $n=2$.

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$ no se puede determinar su valor de verdad.

INDUCCIÓN



① a) se cae

② si un dominó se cae, el siguiente también se cae.

$\phi(n) \Leftrightarrow$ "el dominó $i=n$ se cae" N.

①: $\phi(0)$

②: $\phi(0) \Rightarrow \phi(1) \overset{②}{\Rightarrow} \phi(2) \overset{②}{\Rightarrow} \phi(3) \overset{②}{\Rightarrow} \dots$

$\cancel{\emptyset}(n)$

① $\cancel{\emptyset}(n_0) \Leftrightarrow V$

② $(\forall k \in \mathbb{N})(k \geq n_0)\left(\cancel{\emptyset}(k) \Rightarrow \cancel{\emptyset}(k+1)\right)$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \ \cancel{\emptyset}(n)$

$\underline{P_2}|$ Resuelva x inducción:

(a) $\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$

CASO BASE: $n=1$.

L.I: $\dfrac{1}{1\cdot 5} = \dfrac{1}{5}$; LD: $\dfrac{1}{4\cdot 1+1} = \dfrac{1}{5}$

$LI = LD \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$ se cumple para $n=1$

H.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ t.q $\dfrac{1}{1\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 9} + \cdots \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \dfrac{k}{4k+1}$ (*)

p.d.q: $\underbrace{\dfrac{1}{1\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}} + \dfrac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} = \dfrac{k+1}{4(k+1)+1}$

Del lado izquierdo:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}_{H.I.\ \circledast}+\frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)}$$

$$=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$$ $\longrightarrow$ yo quiero llegar a $=\dfrac{k+1}{4(k+1)+1}$

$$=\frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}$$

$$=\frac{\cancel{(4k+1)}(k+1)}{\cancel{(4k+1)}(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}=\frac{k+1}{4k+4+1}$$

$$=\frac{k+1}{4(k+1)+1} \quad \square$$

Luego, del caso base y el paso inductivo

inducción

$$\Longrightarrow \forall n\geq 1:\ \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{(4n+1)}$$

(b) $\forall n\geq 1\ \ 2^{2n}-3n-1$ es divisible por 9

$a \mid b \iff \exists k\in\mathbb{Z}:\ b=a\cdot k$

a divide a b

$\iff$

b es divisible por a

$$2^{2n}-3n-1=9k \longrightarrow k\in\mathbb{Z}.$$

CASO BASE. $m = 1$

$$2^{2\cdot 1} - 3\cdot 1 - 1 = 4 - 3 - 1$$
$$= 0 = 9\cdot 0$$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2^{2m} - 3m - 4 \overset{(m=1)}{=} 9k \Leftrightarrow$

$9 \mid 2^{2m} - 3m - 4$ (para $m = 1$)

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN: para $k \geq 1$:

$\boxed{2^{2k} - 3k - 1}$ $= 9p,\ p \in \mathbb{Z}$ es divisible por 9.

Queremos demostrar que

$2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$ es div. por 9.

$$2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$$
$$= 2^{2k+2} - 3k - 3 - 1$$
$$= 4\cdot 2^{2k} - 3k - 3 - 1$$
$$= (3+1)\,2^{2k} - 3k - 3 - 1$$
$$= 3\cdot 2^{2k} + \underbrace{2^{2k} - 3k - 1}_{} - 3$$

$2^{2k} - 3k - 1 = 9z,\ z \in \mathbb{N}$

H.I.

$\Leftrightarrow$

$2^{2k} - 1 = 3k + 9z$

$z \in \mathbb{Z}$

$$= 3\cdot 2^{2k} + 9z - 3 \quad \text{H.I.}$$
$$= 3(2^{2k} - 1) + 9z \quad \text{HI2}$$

HI2

$= 3(9z + 3k) + 9z$

$= 9(3z + k + z) = 9(\underbrace{4z + k}_{\in \mathbb{Z}})$

Demostramos que $\exists m \in \mathbb{Z} : 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1 = 9m$

$(m = 4z + k)$

$\iff 9 \mid 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$

Luego, C.B y Paso Inductivo

$\Rightarrow \forall n \geq 1,\ 2^{2n} - 3n - 1$ es div. por 9 $\square$.

P3 Secuencia de Fibonacci

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(2) = 1 \\ \forall n \geq 3 \,,\; F(n) = F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

$F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$

$F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$

$F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

$F(n)$

(a) $\forall n \geq 1 \quad F(n) < 2^n$

C.B: $n = 1$. $F(1) = 1$, $2^1 = 2$ | $F(1) = 1 < 2 = 2^1$ ✓

Se cumple el caso base.

H.I. FUERTE: Sea $k \in \mathbb{N}$ t.q $\forall i \in \{1, \dots k\}$

$$F(i) < 2^i$$

Debil:

Sea $k \in \mathbb{N}$ t.q.

$F(k) < 2^k$

Fuerte:

Sea $k \in \mathbb{N}$

$F(1) < 2^1 \wedge F(2) < 2^2 \wedge \dots F(k) < 2^k$

p.d.q. $F(k+1) < 2^{k+1}$ ✓

$1 \; - - - \; k-1 \; k$ ✓

En efecto

$F(k+1) = F(k) + F(k-1)$ /H.I.F

Queremos llegar a $F(k+1) < 2^{k+1}$

$< 2^{k} + 2^{k-1}$

$= 2^{k} + \frac{1}{2} 2^{k}$

$= 2^{k}(1 + 1/2) = 2^{k}(3/2)$ $\rightarrow 3/2 < 2$

$< 2^{k} \cdot 2$

$= 2^{k+1}$

C.B ✓ y Paso inductivo ✓

$\Rightarrow \forall n \geq 1, \; F(n) < 2^{n}$

(b) $\forall n \geq 6 \quad F(n) > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

C.B: $n=6$: $F(6) = F(5) + F(4) = 5 + 3 = 8$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5} = \frac{243}{32} = 7{,}59375$$

$F(6) = 8 > 7{,}59375 = \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1}$ ✓

H.I. (Fuerte) Sea $K \in \mathbb{N} : \forall i \in \{6 \dots K\}$

$$F(i) > \left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}$$

pdq: $F(K+1) > \left(\frac{3}{2}\right)^{K}$ (caso $K+1$)

$F(K+1) > \left(\frac{3}{2}\right)^{K}$

$$F(K+1) = F(K) + F(K-1)$$
$$> \left(\frac{3}{2}\right)^{K-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{K-2}$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{K-1}\left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{K-1}\left(\frac{5}{3}\right) > \left(\frac{3}{2}\right)^{K-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{K}$$

$\hookrightarrow 1{,}\overline{6} > 1{,}5 = 3/2$

C.B ✓ y Paso inductivo ✓

$\Rightarrow \forall n \geq 6 \quad F(n) > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(c) $\forall n \geq 2 \quad F(n+1)F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n$

C.B: $n=2$ $\quad F(3)\cdot F(1) - (F(2))^2$

$= 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 = (-1)^2$ ✓

H.I Sea $k \geq 2$: $F(k+1)F(k-1) - (F(k))^2 = (-1)^k$.

p.d.q: $F(k+2)F(k) - (F(k+1))^2 = (-1)^{k+1}$.

En efecto: lado izq:

$F(k+2)F(k) - (F(k+1))^2$ / $F(k+2) = F(k+1) + F(k)$

$= (F(k+1) + F(k))F(k) - (F(k+1))^2$

$= F(k+1)F(k) + (F(k))^2 - (F(k+1))^2$

$= F(k+1)\left[F(k) - F(k+1)\right] + (F(k))^2$

$F(k+1) = F(k) + F(k-1)$ / $-F(k-1) - F(k+1)$

$\Leftrightarrow \quad F(k) - F(k+1) = -F(k-1)$

$= F(k+1)(-F(k-1)) + (F(k))^2$

$= -\left[F(k+1)F(k-1) - (F(k))^2\right] \overset{H.I}{=} -\left[(-1)^k\right]$

$= (-1)^{k+1}.$

Luego $F(k+2)F(k) - (F(k+1))^2 = (-1)^{k+1}$

C.B ✓ y Paso Inductivo ✓

$\Rightarrow \forall n \geq 2, \; F(n+1)F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n$

Identidad de Cassini.