**MA1101-7 Introducción al Álgebra**
**Profesor:** Pablo R. Dartnell R.
**Auxiliares:** Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

# Auxiliar 2 - Inducción

15 de Abril de 2021

**Resumen**

- **[Principio de inducción]**: Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una función proposicional, se tiene que la proposición:

$$\forall n \geq n_0, P(n) \tag{1}$$

Es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\textit{Caso base}} \wedge \ [\forall n \geq n_0, \ \underbrace{P(n)}_{\textit{H.I. (débil)}} \ \Rightarrow P(n+1)]$$

***Observación:*** Este tipo de inducción también es conocida como inducción débil.

- **[Principio de inducción Fuerte]**: También tenemos que la proposición (1) es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\textit{Caso base}} \wedge \ [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n_0) \wedge \cdots \wedge P(n)}_{\textit{H.I. (fuerte)}} \Rightarrow P(n+1)]$$

Esta inducción es llamada inducción fuerte pues ocupa completamente la hipótesis inductiva.

**P1.** Sea $P(n)$ un predicado con conjunto de referencia $\mathbb{N}$. Demuestre que

(a) $\exists n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$.

(b) $\Big(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(1)\Big) \vee \overline{P(1)}$.

(c) Se cumple $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \vee P(0) \vee \overline{P(1)}$?

**P2.** Demuestre por inducción los siguientes resultados:

(a) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \ \cdots \ + \dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$

(b) $\forall n \geq 1, 2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9

**P3.** Una de las sucesiones más famosas es la sucesión de Fibonacci, esta se define por recurrencia de la siguiente forma:

$$F(1) = 1, F(2) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2) \forall n \geq 3$$

Demuestre por inducción las siguientes propiedades:

(a) $\forall n \geq 1, F(n) < 2^n$

(b) $\forall n \geq 6, F(n) > \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

(c) $\forall n \geq 2, F(n+1) \cdot F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n$ (Identidad de Cassini)

**P4.** Un trominó es una pieza de $2 \times 2$ pero sin un cuadrado, por lo que queda en forma de L rotada como se desee. Considere un tablero de $2^n \times 2^n$ al cual le falta una casilla. Muestre por inducción que se puede teselar este tablero con trominós.

**P5. Propuesto:** Demuestre que los números de la forma 12008, 120308, 1203308, ... son divisibles por 19

**P6. Propuesto:** Demuestre que $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$

(a) Usando inducción.

(b) **Desafío:** Sin usar inducción. *(Hint: Transforme el producto de la izquierda en productos de la forma* $\frac{a_i}{a_{i-1}}$*, con* $a_i$ *apropiado y cancele términos).*