PAUTA AUXILIAR #1

P1

(a) En efecto, el lado izquierdo

$p \wedge q \Rightarrow r$

$\Leftrightarrow [\, \overline{p \wedge q} \vee r \,]$ / caract implica

$\Leftrightarrow [\, \overline{p} \vee \overline{q} \vee r \,]$ / De Morgan

Ahora, el lado derecho

$p \wedge \overline{r} \Rightarrow \overline{q}$

$\Leftrightarrow [\, \overline{p \wedge \overline{r}} \vee \overline{q} \,]$ / caract implica

$\Leftrightarrow (\, \overline{p} \vee \overline{\overline{r}} \vee \overline{q} \,)$ / De Morgan

$\Leftrightarrow [\, \overline{p} \vee r \vee \overline{q} \,]$ / Doble negación

$\Leftrightarrow [\, \overline{p} \vee \overline{q} \vee r \,]$ / $\vee$ conmuta y asocia.

Juntando ambos lados, se concluye la equivalencia ■

(b) Suponemos, por contradicción, que la implicancia es falsa. Entonces,

$$[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow V \quad (i)$$

y además

$$[\bar{p}] \Leftrightarrow F \quad (ii)$$

pues $V \Rightarrow F$ es la única manera que un implica sea falso.

De (ii) se obtiene que $p \Leftrightarrow V$

De (i), como la expresión es una conjunción (términos unidos por $\wedge$), cada término es V, por lo tanto,

$$[p \Rightarrow \bar{q}] \Leftrightarrow V \quad (I)$$

$$[\bar{r} \vee q] \Leftrightarrow V \quad (II)$$

$$[r] \Leftrightarrow V \quad (III)$$

De (III) se obtiene $r \Leftrightarrow V$

Reemplazamos en (II) y obtenemos

$$V \iff [\bar{r} \vee q] \iff [F \vee q] \iff [q]$$

Por lo tanto, $q \iff V$

Reemplazando en (I) se obtiene

$$V \iff [\underset{\overset{\downarrow}{V}}{p} \Rightarrow \underset{\overset{\downarrow}{F}}{\bar{q}}] \iff [V \Rightarrow F] \iff F$$

Por lo tanto, $V \iff F$, lo que es una contradicción $\rightarrow\leftarrow$

Así que se concluye que la implicancia es verdadera $\blacksquare$

(e) En efecto,

$$(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow\bar{r})\Rightarrow\left(\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\overline{(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow\bar{r})}\vee\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)\right]$$

/caract implica

$$\Leftrightarrow\left[\overline{p\Rightarrow q}\vee\overline{\bar{s}\Rightarrow\bar{r}}\vee\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)\right]$$

/De Morgan

$$\Leftrightarrow\left[\overline{\bar{p}\vee q}\vee\overline{\bar{\bar{s}}\vee\bar{r}}\vee\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)\right]$$

/caract implica

$$\Leftrightarrow\left[(\bar{\bar{p}}\wedge\bar{q})\vee(\bar{s}\wedge r)\vee\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)\right]$$

/De Morgan y doble negación

$$\Leftrightarrow\left[(p\wedge\bar{q})\vee\bar{p}\vee(\bar{s}\wedge r)\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)\right]$$

/doble negación y $\vee$ conmuta

$$\Leftrightarrow\left[\left(\underbrace{(p\vee\bar{p})}_{V}\wedge(\bar{q}\vee\bar{p})\right)\vee\left((\bar{s}\vee\bar{r})\wedge\underbrace{(r\vee\bar{r})}_{V}\right)\vee(q\wedge s)\right]$$

/distributivo

$$\Leftrightarrow\left[(\bar{q}\vee\bar{p})\vee(\bar{s}\vee\bar{r})\vee(q\wedge s)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\bar{q}\vee(q\wedge s)\vee\bar{p}\vee\bar{s}\vee\bar{r}\right]$$ /$\vee$ conmuta

$$\Leftrightarrow \left[\left(\underbrace{\cancel{(\bar{q} \lor q)}}_{V} \land (\bar{q} \lor s) \right) \lor \bar{p} \lor \bar{s} \lor \bar{r} \right]$$ / distributiva

$$\Leftrightarrow \left[\bar{q} \lor s \lor \bar{p} \lor \bar{s} \lor \bar{r} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(s \lor \bar{s}) \lor \bar{q} \lor \bar{p} \lor \bar{r} \right]$$ / $\lor$ conmuta y asocia

$$\Leftrightarrow \left[V \lor \bar{q} \lor \bar{p} \lor \bar{r} \right]$$ / tercio exclusivo

$$\Leftrightarrow V \quad \blacksquare$$ / dominancia

P2

(a) Construimos la tabla de verdad para las expresiones

p	q	$\bar{p}$	$p \lor q$	$p \downarrow p$	$\overline{p \downarrow q}$
V	V	F	V	$V \downarrow V \Leftrightarrow F$	$\overline{V \downarrow V} \Leftrightarrow \overline{F} \Leftrightarrow V$
V	F	F	V	$V \downarrow V \Leftrightarrow F$	$\overline{V \downarrow F} \Leftrightarrow \overline{F} \Leftrightarrow V$
F	V	V	V	$F \downarrow F \Leftrightarrow V$	$\overline{F \downarrow V} \Leftrightarrow \overline{F} \Leftrightarrow V$
F	F	V	F	$F \downarrow F \Leftrightarrow V$	$\overline{F \downarrow F} \Leftrightarrow \overline{V} \Leftrightarrow F$

Así, notamos que $\overline{p} \Leftrightarrow p \downarrow p$

y $p \vee q \Leftrightarrow \overline{p \downarrow q}$

pues sus columnas son equivalentes

(b)

$[p \Rightarrow q]$

$\Leftrightarrow [\overline{p} \vee q]$ / caract implica

$\Leftrightarrow [\overline{\overline{p} \downarrow q}]$ // / parte (a)

$p \wedge q$

$\Leftrightarrow [\overline{\overline{p} \vee \overline{q}}]$ / De Morgan

$\Leftrightarrow [\overline{\overline{\overline{p} \downarrow \overline{q}}}]$ / parte (a)

$\Leftrightarrow \overline{p} \downarrow \overline{q}$ / doble negación.

P3 En efecto

$$s \Rightarrow ((\overline{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$

es verdadera, y como $s \Leftrightarrow V$, el lado izq de la implicancia es V, por lo que el lado derecho de la implicancia también debe serlo (si no, la implicancia sería falsa)

Luego,

$$V \Leftrightarrow ((\overline{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$

$$\Leftrightarrow ((\overline{p} \Rightarrow q) \wedge (\overline{r} \Rightarrow \overline{p})) \quad / \text{ contra-recíproca}$$

$$\boxed{\Rightarrow} (\overline{r} \Rightarrow q) \quad / \text{ transitividad}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{\overline{r}} \vee q) \quad / \text{ caract. implica}$$

$$\Leftrightarrow (q \vee r) \quad / \text{ doble negación y } \vee \text{ conmuta.}$$

$\blacksquare$