Miniaux 1: $\forall$, $\exists$, $\exists!$

P1. Sea p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional.

a) Si llamamos r a la proposición $(\forall x)(p \Longrightarrow q(x))$, determine el valor de verdad de p, sabiendo que r es falsa. Justifique.

r es falsa, $r \Leftrightarrow (\forall x)(p \Rightarrow q(x))$.

$\bar{r}$ es verdadera, $\bar{r} \Leftrightarrow \sim[(\forall x)(p \Rightarrow q(x))]$

$\Leftrightarrow (\exists x) \sim (p \Rightarrow q(x))$

$\sim(p \Rightarrow q(x))$ / Carac. $\Rightarrow$ Implica

$\Leftrightarrow (\exists x)(p \wedge \sim q(x))$

$\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q(x))$ / De Morgan

$\Rightarrow \boxed{p \text{ es } V}$ y $(\exists x)(\bar{q}(x))$ es V

$\Leftrightarrow \sim(\sim p) \wedge \sim q(x)$ / doble neg.

$\Leftrightarrow p \wedge \sim q(x)$

Distributividad del $\forall$ sobre $\wedge$

$(\forall x \in E,\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x))$

De Morgan:

- $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$

b) Llamamos ahora s a la proposición $(\exists x)(p \Longrightarrow q(x))$. Decida si es posible determinar el valor de verdad de p, sabiendo que s es verdadera. Justifique.

s es V, $\quad s \Leftrightarrow (\exists x)(p \Rightarrow q(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\sim p \vee q(x))$

Nos ponemos en casos:

- $(\exists x)(q(x))$ es V: no podemos concluir nada de p

- $[(\exists x)(q(x))]$ es F

$\Leftrightarrow [(\forall x)(\sim q(x))]$ es V $\Leftrightarrow$ $((\forall x)(q(x)$ es falso$))$

$\Leftrightarrow \sim p \vee \underbrace{(\exists x)(q(x))}_{F}$

$\Rightarrow \sim p \vee F$

$\Leftrightarrow \sim p$

$\Rightarrow \sim p$ es V $\Leftrightarrow$ p es F.

Como hay al menos un caso donde no podemos determinar p, entonces no es posible determinar su valor de verdad en el caso general $\square$

P2. Considere el conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones y luego niéguelas.

(I) $(\forall x \in A)(\forall y \in A),\ x + y \leq 1$

CONTRAEJEMPLO.

(i) Tomando $x = y = 1$: $x + y = 2 > 1$.

Luego la proposición es falsa.

Negando: $\sim\left[(\forall x \in A)(\forall y \in A)\ x+y \leq 1\right]$

$\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\exists y \in A)\ x + y > 1$ $\square$

$\otimes$ $\sim(x \leq y) \Leftrightarrow x > y$

$\sim(x \geq y) \Leftrightarrow x < y$

(II) $(\forall x \in A)(\exists y \in A),\ x^2 \leq y$

$A = \{-1, 0, 1\}$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 & ((-1)^2 \leq 1) \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1 & \begin{pmatrix} 0 \leq 0 \\ 0 \leq 1 \end{pmatrix} \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 & (1 \leq 1) \end{cases}$$

Luego la prop. es V.

Negando: $\sim \left[(\forall x \in A)(\exists y \in A)\ x^2 \leq y \right]$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\forall y \in A)\ x^2 > y$$

CONTRAEJEMPLO

$$\begin{cases} x = 0, \quad y = 1. & \text{no se cumple } 0 > 1 \\ x = -1, \quad y = 1 & 1 > 1 \quad F \\ x = 1, \quad y = 1 & 1 > 1 \quad F. \end{cases}$$