MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Miniaux 1 - Cuantificadores

31 de Marzo de 2021

Resumen

- **[Cuantificador Universal]**: La expresión $\forall x \in E, P(x)$ es una proposición verdadera si al reemplazar x por cualquier elemento en E se verifica que $P(x)$ es verdadera.
- **[Propiedades]:**
  a) ***Instanciación universal***: Si $e \in E$ es elemento arbitrario, se cumple que $(\forall x \in E, P(x)) \implies P(e)$.
  b) ***Generalización universal***: Si se cumple $P(e)$ para $e \in E$ arbitrario, entonces $\forall x \in E, P(x)$ es verdadera.
- **[Contraejemplo]**:Un elemento $e \in E$ tal que $P(e)$ es falsa se denomina contraejemplo de $(\forall x \in E, P(x))$.
- **[Cuantificador existencial]**: Se define como: $(\exists x \in E, P(x)) \iff \neg(\forall x \in E, \neg P(x))$
- **[Negación de cuantificadores]**:
  a) $\overline{(\exists x)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$
  b) $\overline{(\forall x)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$
- **[Propiedades]:**
  a) ***Instanciación (o eliminación) existencial***: Si se tiene $\exists x \in E, P(x)$, entonces para un elemento $e \in E$ particular se tiene que $P(e)$ es verdadera.
  b) ***Generalización existencial***: Si se cumple $P(e)$ para un $e \in E$ en particular, entonces $\exists x \in E, P(x)$ es verdadera.
- **[Proposiciones]**: Para $P(x)$ y $Q(x)$ predicados en conjunto de referencia E se cumplen las siguientes:
  a) ***Modus Ponens Universal***: $P(e) \wedge (\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)) \implies Q(e)$
  b) $(\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, P(x) \implies Q(x)) \implies (\forall x \in E, Q(x))$
  c) ***Distributividad de $\forall$ con respecto a $\wedge$***:
  $$\begin{aligned}&(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x))\\ \iff &(\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))\end{aligned}$$
  d) ***Distributividad de $\exists$ con respecto a $\vee$***:
  $$\begin{aligned}&(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x))\\ \iff &(\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))\end{aligned}$$
  e) $(\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)) \implies (\forall x \in E, P(x) \vee Q(x))$
  f) $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \implies (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$
- **[+ Propiedades]:** Sean p predicado constante y $Q(x)$ predicado con conjunto de referencia E. Se tienen:
  a) $(\forall x \in E, p) \iff p$
  b) $(\exists x \in E, p) \iff p$
  c) $p \vee (\forall x \in E, Q(x)) \iff (\forall x \in E, p \vee Q(x))$
  d) $p \wedge (\exists x \in E, Q(x)) \iff (\exists x \in E, p \wedge Q(x))$
- **[Intercambio de cuantificadores]:** Sea $P(x, y)$ predicado con conjunto de referencia E. Son tautología:
  a) $(\forall x \in E, \forall y \in E, P(x, y)) \iff (\forall y \in E, \forall x \in E, P(x, y))$
  b) $(\exists x \in E, \exists y \in E, P(x, y)) \iff (\exists y \in E, \exists x \in E, P(x, y))$
  c) $(\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)) \implies (\forall y \in E, \exists x \in E, P(x, y))$
- **[Existencia y unicidad]**: Se define el cuantificador de existencia y unicidad $(\exists!)$ como sigue:

$$(\exists! x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)\{(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)\}]$$

P1. Sea p una proposición lógica y $q(x)$ una función proposicional.

a) Si llamamos r a la proposición $(\forall x)(p \Longrightarrow q(x))$, determine el valor de verdad de p, sabiendo que r es falsa. Justifique.

b) Llamamos ahora s a la proposición $(\exists x)(p \Longrightarrow q(x)$. Decida si es posible determinar el valor de verdad de p, sabiendo que s es verdadera. Justifique.

P2. Considere el conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones y luego niéguelas.

(I) $(\forall x \in A)(\forall y \in A),\ x + y \leq 1$

(II) $(\forall x \in A)(\exists y \in A),\ x^2 \leq y$