

Auxiliar L^{SUS}

Resumen

- [Tautologías básicas]: Las siguientes proposiciones son tautologías:
 - Dominancia:** $p \vee V \Leftrightarrow V$, $p \wedge F \Leftrightarrow F$
 - Identidad:** $p \wedge V \Leftrightarrow p$, $p \vee F \Leftrightarrow p$
 - Idempotencia:** $p \wedge p \Leftrightarrow p$, $p \vee p \Leftrightarrow p$
 - Doble negación:** $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
 - Tercio excluso:** $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow V$
 - Consistencia:** $p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow F$
 - Absorción:** $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
 - Relajación:** $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \Rightarrow p \vee q$
 - Caracterización de la implicancia:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$
- [Álgebra Booleana]: Son tautologías:
 - **Leyes de De Morgan:**
 $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$, $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
 - **Conmutatividad:**
 Del $\vee$: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
 Del $\wedge$: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
 - **Asociatividad**
 Del $\vee$: $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
 Del $\wedge$: $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- [Distributividad]
 - Del $\wedge$ con respecto al $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 - Del $\vee$ con respecto al $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- [Tautologías relevantes]: Otras tautologías a tener en cuenta son:
 - Doble implicancia:** $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
 - Modus Ponens:** $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
 - Transitividad: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
 - Contrareciproca:** $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$
 - Contradicción:**
 - Forma 1: $q \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow F)$
 - Forma 2: $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow [p \wedge \bar{q}] \Rightarrow F$
- [Negación de cuantificadores]:
 - $\overline{(\exists x)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\bar{p}(x)$
 - $\overline{(\forall x)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\bar{p}(x)$
- [Existencia y unicidad]: Se define el cuantificador de existencia y unicidad ($\exists!$) como sigue:

$$(\exists!x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)\{(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)\}]$$

P) $p, q \vdash p \wedge q$

$$(a) (p \wedge q \Rightarrow V) \Leftrightarrow (p \wedge \bar{r} \Rightarrow \bar{q})$$

$$(p \wedge q) \Rightarrow V \quad \text{Caract. Implicancia} \quad \Leftrightarrow p \wedge \bar{r} \Rightarrow \bar{q} \quad \text{Caract. Implicancia}$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee V \quad \text{De Morgan} \quad \Leftrightarrow \neg(p \wedge \bar{r}) \vee \bar{q} \quad \text{De Morgan}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee V \quad \text{Doble Negación}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee V \vee \neg q \quad \text{Commut.}$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee V$$

Son iguales, ergo tienen los mismos valores de verdad y son equivalentes $\square$.

$$(b) \underbrace{[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r]}_{(1)} \Rightarrow \bar{p} \quad (2)$$

Por contradicción

Suponer (1) $\Rightarrow$ (2) es falso

(1) es V y (2) es falso

$\bar{p}$ es falso

$\Rightarrow$ p es Verdadero

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(1) : $(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r$ es Verdadero.

$\Rightarrow p \Rightarrow \bar{q}$ es Verdadero (a)

$\bar{r} \vee q$ es Verdadero (b)

r es verdadero. (c)

Usando (c) en (b)

$\neg V \vee q$ es Verdadero

$F \vee q$ es Verdadero

$\Rightarrow q$ es Verdadero.

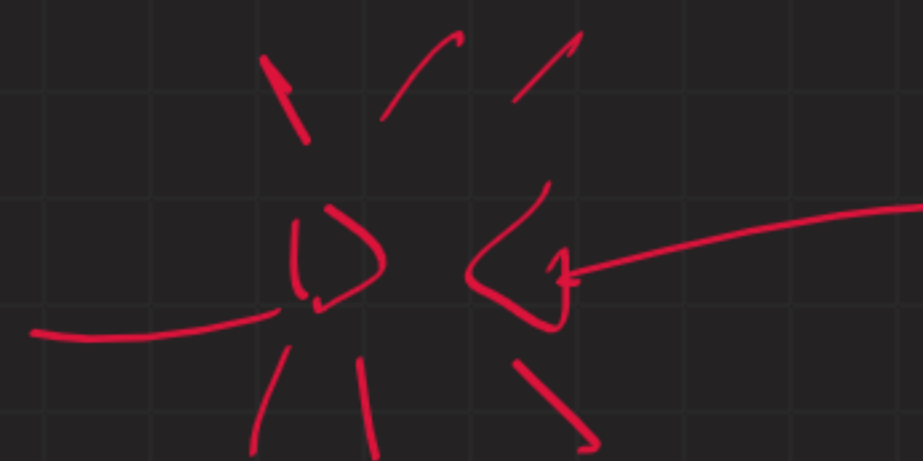
Usando (b) en (a)

$p \Rightarrow \neg V$ es verdadero

$\Rightarrow \neg p \vee F$ es Verdadero

$\Rightarrow \neg p$ es Verdadero

$\Rightarrow p$ es Falso



Como llegamos a una contradicción, entonces nuestra suposición inicial $[(1) \Rightarrow (2) \text{ es falso}]$ es incorrecta. Luego $(1) \Rightarrow (2)$ es Verdadero.

$$(c) \left[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{s} \Rightarrow \bar{r}) \right] \Rightarrow \left[\bar{p} \vee \bar{r} \vee (q \wedge s) \right]$$

es Verdadera

$\neg p \vee \neg r \vee (q \wedge s)$ / De Morgan

HIPÓTESIS

1. $p \Rightarrow q$

2. $\bar{s} \Rightarrow \bar{r}$

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge r) \vee (q \wedge s)$ / 1 y Modus Ponens.

$\Rightarrow \neg(\bar{q} \wedge r) \vee (q \wedge s)$ / 2. modificada $\neg A \vee A \Leftrightarrow V$

de HIP 2 $\bar{s} \Rightarrow \bar{r}$ / Contrarrecíproca

$\Leftrightarrow \boxed{r \Rightarrow s}$ HIP 2 modificada y Modus Ponens

$\Rightarrow \neg(q \wedge s) \vee (q \wedge s) \Leftrightarrow V \quad \square$

Entonces $\frac{9}{a}$ es Verdadera, pues el único

caso posible para que sea falsa no ocurre

$P_2 \mid p, \neg p \text{ prop.} \quad \text{ni p ni q} := p \downarrow q$

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1: valores de $p \downarrow q$.

(a)(i) $\bar{p} \Leftrightarrow p \downarrow p$

p	$\bar{p}$	$p \downarrow p$	Luego
V	F	F	por tabla de
F	V	V	$\bar{p} \Leftrightarrow p \downarrow p$

(ii) $p \vee q \Leftrightarrow \sim(p \downarrow q)$

p	q	$p \downarrow q$	$\sim(p \downarrow q)$	$p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

(b) Exprese en términos de $\sim$ y $\downarrow$

(i) $p \Rightarrow q$ / Caract. Implicación

$\Leftrightarrow \sim p \vee q$ / parte (a)(ii)

$\Leftrightarrow \sim(\sim p \downarrow q)$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \downarrow q)$

$\sim, \downarrow$

(ii) $p \wedge q$ / DM

$$p \wedge q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) / \text{parte (a)(ii)} \quad (\text{De Morgan})$$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim(\sim p \downarrow \sim q)) / \text{Doble Negación}$$

$$\Leftrightarrow \sim p \downarrow \sim q \quad \text{Luego } p \wedge q \Leftrightarrow \sim p \downarrow \sim q, \\ \text{la cual est\u00e1 en t\u00e9rminos de } \sim \text{ y } \downarrow \square$$

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \downarrow \sim q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F

P3 p, q, r, s proposiciones.

s es Verdadera

$\boxed{s \Rightarrow ((\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))}$ es Verdadera.

Probar que $q \vee r$ es Verdadera.

$p \Rightarrow q$
 $V \Rightarrow$

$q \Rightarrow V$

$(\bar{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ es Verdadero.

i. Si p es Verdadero.

a. $(\bar{p} \Rightarrow q)$ es V .

a. $F \Rightarrow q \Leftrightarrow V$
falso.

b. $(p \Rightarrow r)$ es V .

b. $V \Rightarrow r$ es V

$\Rightarrow r$ es V $\square$

$\Rightarrow q \vee r$ es V

Si p es Falso:

(a) $V \Rightarrow q$ es V

$\Rightarrow q$ es V

$\Rightarrow q \vee r$ es V $\square$

Luego, dadas las hipótesis del enunciado,
 $q \vee r$ es V para cualquier valor de p $\square$