MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo R. Dartnell R.
Auxiliares: Pablo Paredes Haz y Vicente Poblete Contreras

Auxiliar I - Lógica Proposicional

26 de Marzo de 2021

Resumen

- **[Tautologías básicas]**: Las siguientes proposiciones son tautologías:
  a) ***Dominancia***: $p \vee V \Leftrightarrow V, \quad p \wedge F \Leftrightarrow F$
  b) ***Identidad***: $p \wedge V \Leftrightarrow p, \quad p \vee F \Leftrightarrow p$
  c) ***Idempotencia***: $p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$
  d) ***Doble negación***: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
  e) ***Tercio excluso***: $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow V$
  f) ***Consistencia***: $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow F$
  g) ***Absorción***: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p, \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
  h) ***Relajación***: $p \wedge q \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow p \vee q$
  i) ***Caracterización de la implicancia***: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$
- **[Álgebra Booleana]**: Son tautologías:
  - ***Leyes de De Morgan:*** $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
  - ***Conmutatividad:***
    Del $\vee$: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
    Del $\wedge$: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
  - ***Asociadtividad***
    Del $\vee$: $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
    Del $\wedge$: $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
  - ***Distributividad***
    Del $\wedge$ con respecto al $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
    Del $\vee$ con respecto al $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- **[Tautologías relevantes]**: Otras tautologías a tener en cuenta son:
  a) ***Doble implicancia***: $(p \Leftrightarrow q) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
  b) ***Modus Ponens***: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
  c) Transitividad: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
  d) ***Contrareciproca***: $(p \Rightarrow q) \iff (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$
  e) ***Contradicción***:
     - Forma 1: $q \iff (\overline{q} \implies F)$
     - Forma 2: $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow [p \wedge \overline{q}] \Rightarrow F$
- **[Negación de cuantificadores]**:
  a) $\overline{(\exists x)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$
  b) $\overline{(\forall x)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$
- **[Existencia y unicidad]**: Se define el cuantificador de existencia y unicidad ($\exists!$) como sigue:

$$(\exists! x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)\{(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)\}]$$

P1. Sean p, q y r proposiciones. Demuestre, sin usar tablas de verdad, que las siguientes proposiciones son tautologías:

a) $(p \wedge q \implies r) \iff (p \wedge \overline{r} \implies \overline{q})$.

b) $[(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r] \implies \overline{p}$.

c) $[(p \implies q) \wedge (\overline{s} \implies \overline{r})] \implies [\overline{p} \vee \overline{r} \vee (q \wedge s)]$.

P2. Sean p y q proposiciones. Se define la proposición *ni* p *ni* q, que denotaremos por $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Cuadro 1: valores de $p \downarrow q$.

a) Muestre que $\overline{p} \iff p \downarrow p$ y que $p \vee q \iff \overline{(p \downarrow q)}$.

b) Exprese las proposiciones $(p \implies q)$ y $p \wedge q$ utilizando únicamente $\sim$ y $\downarrow$.

P3. Sean p, q, r, s proposiciones. Se sabe que s es verdadera y que

$$s \implies ((\overline{p} \implies q) \wedge (p \implies r))$$

es verdadera. Probar que $q \vee r$ es verdadera.

P4. PROPUESTO: Pruebe, sin usar tablas de verdad, que la siguientes proposiciones son tautologías

a) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

b) $[\{(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow t)\} \vee \{(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow t)\}] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge t)]$