Introducción al Álgebra MA1101

Guía 2: Cuantificadores y Principio de Inducción

P1. Determine la negación de las siguientes proposiciones.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq 3 \vee n! = 2^n$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, n = 0 \vee (\exists m \in \mathbb{N}, m/n \neq 1)$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow (\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a, b, c \neq 0 \Rightarrow a^n + b^n \neq c^n)$.

(d) Determine el valor de verdad de (a) y (b). (La parte (c) corresponde al Teorema de Fermat, que es verdadero, pero su demostración demoró ¡358 años!).

P2. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = x + 1$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \neq x + 1$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = x + 1$.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq x + 1$.

P3. Para P y Q predicados con conjunto de referencia E, determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas. Cuando lo sean, dé una demostración. En caso contrario, proponga predicados P y Q que muestren que no lo son.

(a) $(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$.

(b) $(\exists x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x))$.

(c) $(\exists x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)) \iff ((\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, Q(x)))$.

P4. Use el principio de inducción para demostrar las siguientes propiedades.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3$ es par $\Rightarrow n$ es par.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \vee n \leq 1$.

(c) Para $a \in \mathbb{N}, a \neq 0$, demuestre que $(\forall b \in \mathbb{N}, b/a \in \mathbb{N})$ es falsa. Use esto y el principio de inducción para demostrar que $\forall a \in \mathbb{N}, a = 0 \vee (\exists b \in \mathbb{N}, b/a \in \mathbb{N})$.

P5. Use el principio de inducción para demostrar las siguientes propiedades.

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, (7^{n+1} - 1)/6 = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^n$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, la suma de los ángulos interiores de un polígono con n lados, $n \geq 3$, es $180(n-2)$ grados o, equivalentemente $\pi(n-2)$ radianes.

(c) Sean $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$ y sea $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (n-1)(a_1 - a_0) + a_1$.